Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1993 ∽

EXERCICE 1 **4 points**

Dans le plan complexe rapporté à un repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ orthonormal direct, on considère les points A, B et M d'affixes respectives 2, $-\text{i}$ et z, avec $z \neq -\text{i}$ et $z \neq 2$.

1. Donner une interprétation géométrique de $\arg \dfrac{z-2}{z+\text{i}}$.

2. Déterminer et construire l'ensemble E des points M d'affixe z pour lesquels $\arg \dfrac{z-2}{z+\text{i}} = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$.

On note C le centre du cercle (C) contenant E.

a. Montrer que $\left(\overrightarrow{\text{CB}},~\overrightarrow{\text{CA}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

b. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre B qui transforme A en C.

c. En déduire la forme algébrique de l'affixe de C.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit, dans le plan orienté, un triangle équilatéral direct ABC, c'est-à-dire tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}},~\overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$. On note O son centre de gravité. On considère des points M, N, P, respectivement sur les segments [AB], [BC] et [CA], tels que AM = BN = CP (on suppose M $\neq$ A et M $\neq$ B).

1. a. Justifier qu'il existe une rotation unique r telle que $r(\text{A}) = \text{B}$ et $r(\text{M}) = \text{N}$ (on énoncera le théorème utilisé). Déterminer son angle.

b. Soit ρ la rotation vectorielle associée à r.

Montrer que $\rho(\text{AB}) = \text{BC}$. En déduire l'image de B par r et le centre de r.

2. a. Quelles sont les images de N et de P par r ?

b. Montrer que le triangle MNP est un triangle équilatéral de centre de gravité O.

3. Soit les cercles Γ_1, Γ_2, Γ_3 circonscrits respectivement aux triangles APM, CPN et BMN. Il n'est pas demandé de dessiner Γ_1, Γ_2 et Γ_3 ?

a. Montrer que Γ_1 passe par O.

Quels autres résultats pourrait-on obtenir par une démonstration analogue ?

b. Montrer que Γ_1, Γ_2 et Γ_3 ont le même rayon.

PROBLÈME **12 points**

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On étudie la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x\text{e}^x - nx.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

A. Soit la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = (1+x)\text{e}^x - n$.

1. Calculer la dérivée de g_n faire le tableau de variation de g_n et déterminer les limites de g_n aux bornes de son ensemble de définition.

2. Montrer que g_n s'annule pour une unique valeur α_n et que α_n est positif ou nul. Que vaut α_1 ?

3. Montrer que $\alpha_n = \ln \dfrac{n}{1+\alpha_n}$ et que $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \ln n$.

4. **a.** Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln x \leqslant x - 1 \quad (1)$.

b. En utilisant (1), déterminer le signe de $g_n\left(\ln\sqrt{n}\right)$.

c. En déduire que : $\dfrac{1}{2}\ln n \leqslant \alpha_n$.

Quelles sont les limites des suites de terme général α_n et $\dfrac{\alpha_n}{n}$?

B.

1. Calculer la dérivée de f_n, faire le tableau de variations de f_n et déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition.

Montrer que $f_n\left(\alpha_n\right) = \dfrac{-n\alpha_n^2}{1+\alpha_n}$.

2. Montrer que $\mathscr{C}_n$ a une asymptote D_n que l'on déterminera. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_n$ et D_n.

3. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}_n$ et de l'axe des abscisses, et préciser la position de $\mathscr{C}_n$ par rapport à cet axe.

4. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

5. **a.** Montrer que $0,35 \leqslant \alpha_2 \leqslant 0,40$.

Déterminer les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près, par défaut et par excès, de α_2.

En déduire un encadrement de $f_2\left(\alpha_2\right)$.

b. Tracez $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sur le même graphique en mettant en évidence les résultats précédents (on choisira comme unité 10 cm sur les deux axes). On précisera les tangentes en O à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine borné limité par $\mathscr{C}_2$ et l'axe des abscisses (on pourra utiliser une intégration par parties).