Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1988 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
On considère l'application f de P dans P qui au point M d'affixe z associe le point M$'$ d'affixe z' tel que

$$z' = 2z + \text{i}z\overline{z}.$$

1. Déterminer et construire l'ensemble des images des points d'ordonnée nulle.
2. Déterminer et construire l'ensemble des images des points d'abscisse nulle.
3. Déterminer et construire l'ensemble des images des points du cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit E l'espace muni d'un repère orthonormal direct $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
Soit P_1 le plan d'équation $x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$ et P_2 le plan d'équation $x\sqrt{3} - y + 1 = 0$.
Désignant par s_{P_1} (resp. s_{P_2}) la symétrie orthogonale par rapport au plan P_1 (resp. P_2), on se propose de déterminer $f = s_{P_2} \circ s_{P_1}$.

1. Déterminer
   a. $D_1 = P_1 \cap (xOy)$;
   b. $D_2 = P_2 \cap (xOy)$.
   (on pourra faire une figure dans le plan xOy).
2. Déterminer, dans le plan xOy muni du repère orthonormal direct $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u_1},~\overrightarrow{u_2}\right)$ où $\overrightarrow{u_1}$ (resp. $\overrightarrow{u_2}$) est un vecteur directeur de D_1 (resp. D_2).
   En déduire la nature et les éléments caractéristiques de

$$f = s_{P_2} \circ s_{P_1}$$

PROBLÈME **12 points**

Les parties A et B sont indépendantes

On se propose, dans ce problème, de résoudre des équations du 3$^{\text{e}}$ degré, de la forme

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0.$$

Partie A

On donne $a = 5,45$, $b = -4,84$. L'équation correspondante est notée (E_1).

1. Étudier les variations de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^3 + 5,45x^2 - 4,84x + 1.$$

En déduire que (E_1) admet une solution négative notée x_1 et une solution double positive notée x_2.

2. Donner les valeurs exactes de x_1 et x_2.

3. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ avec pour unité de longueur le centimètre et $\left\|\vec{\imath}\right\| = 1$, $\left\|\vec{\jmath}\right\| = 0,25$.

a. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de f.

b. Calculer l'aire en cm^2 du domaine plan, ensemble des points $\text{M}(x\,;\,y)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & \leqslant & x & \leqslant & x_2 \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array}\right.$$

On donnera le résultat en cm^2 au mm^2 près par défaut.

Partie B

On donne $a = -1$, $b = 3$. L'équation correspondante est notée (E_2).

1. Démontrer que (E_2) a une solution réelle unique notée α.

2. On pose $g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$.
A l'aide de votre calculatrice, déterminer l'entier relatif k tel que

$$\frac{k}{10} < \alpha < \frac{k+1}{10}$$

3. Démontrer que $g(x) = 0$ équivaut à $x = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$.
Étudier la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x \longmapsto \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$.
Construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal.

4. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite (u_n) par

$$\left\{\begin{array}{ccc} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & h(u_n) \end{array}\right.$$

a. Calculer u_1, u_2 et u_3 et classer u_0, u_1, u_2 et u_3 dans l'ordre croissant.

b. Démontrer que si (u_n) converge, sa limite est solution de (E_2).

c. Démontrer que pour tout entier naturel n, $-\dfrac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 0$.

d. Pour tout p élément de $\mathbb{N}$ on pose

$$\begin{array}{ccc} v_p & = & u_{2p} \\ w_p & = & u_{2p+1} \end{array}$$

Sachant que h est décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{3}\,;\,0\right]$, donner le sens de variation de $h \circ h$ sur cet intervalle.
En déduire que $\left(v_p\right)$ est décroissante et $\left(w_p\right)$ croissante.

e. Prouver que pour $-\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0$, $\left|h'(x)\right| \leqslant \dfrac{8}{27}$.

En déduire que $\left|w_{p+1} - v_{p+1}\right| \leqslant \left(\dfrac{8}{27}\right)^2 \left|w_p - v_p\right|$. En conclure que la suite (u_n) converge.

f. Calculer une valeur approchée de α à 10^{-3} près (on mettra en évidence la méthode choisie).