Baccalauréat ES Amérique du Nord juin 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

En l'absence d'indications spécifiques, les résultats seront arrondis à 10^{-2} *près. On effectuera les calculs statistiques à l'aide de la calculatrice. Aucun détail n'est alors demandé.*

Après injection d'une substance médicamenteuse, un laboratoire de recherche mesure l'évolution de la quantité de cette substance dans le sang d'un individu.

Après une série de mesures, on obtient les résultats donnés dans le tableau indiqué en annexe (document 1), où x désigne le temps écoulé depuis l'injection (exprimé en minutes) et y désigne la quantité de substance (exprimée en dixièmes de grammes par litre). Le nuage de points correspondant est indiqué sur le document 2 de la feuille annexe.

Les mesures réalisées pour $x = 10$ et $x = 60$ ayant été plusieurs fois vérifiées, on juge que les points A et B sont fiables. On se propose de modéliser ce nuage à l'aide de la courbe représentative d'une fonction, afin de réaliser une prévision sur les points d'abscisses 50 et 70 pour lesquels les mesures n'ont pas été effectuées.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. On propose un premier modèle d'ajustement du nuage par une courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = a\ln(x) + b$, et on impose à la courbe de passer par les points A et B.

   a. Déterminer alors les réels a et b.

   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur la feuille annexe (document 2).

   c. Prévoir, à l'aide de ce premier modèle, les quantités mesurables pour $x = 50$ et $x = 70$.

2. Dans cette question, on détermine un deuxième modèle d'ajustement du nuage.

   a. Compléter le tableau (document 3) qui figure sur la feuille annexe avec des résultats arrondis à 10^{-3} près. Calculer alors le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(t,\ y)$. Un ajustement affine paraît-il alors envisageable ?

   b. Déterminer une équation de la droite de régression de y en t par la méthode des moindres carrés.

   c. Montrer que ce second modèle conduit à des prévisions de y, pour $x = 50$ et $x = 70$, égales à 2,70 et 1,04 respectivement.

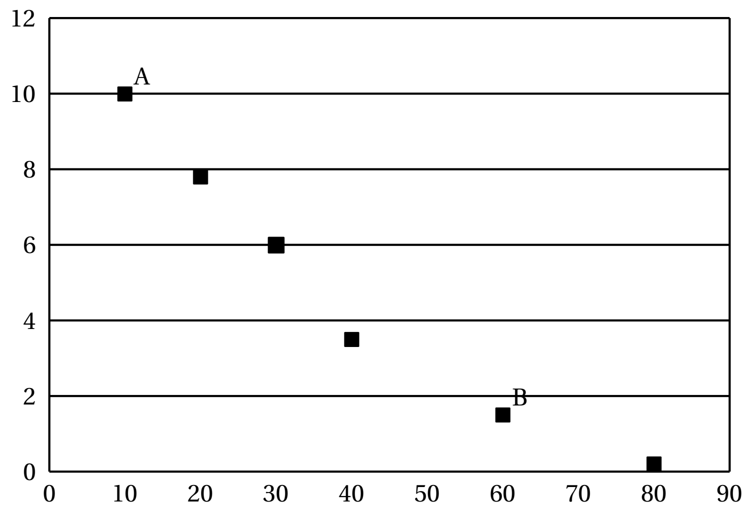
3. Une autre équipe de recherche a effectué les mesures pour $x = 50$ et $x = 70$ dans les mêmes conditions et a obtenu respectivement $y = 2,4$ et $y = 0,6$. Quel modèle doit-on préférer pour ajuster ce nuage ?

ANNEXE
Feuille à rendre avec la copie
Exercice 1

Tableau des coordonnées des points du nuage (document 1) :

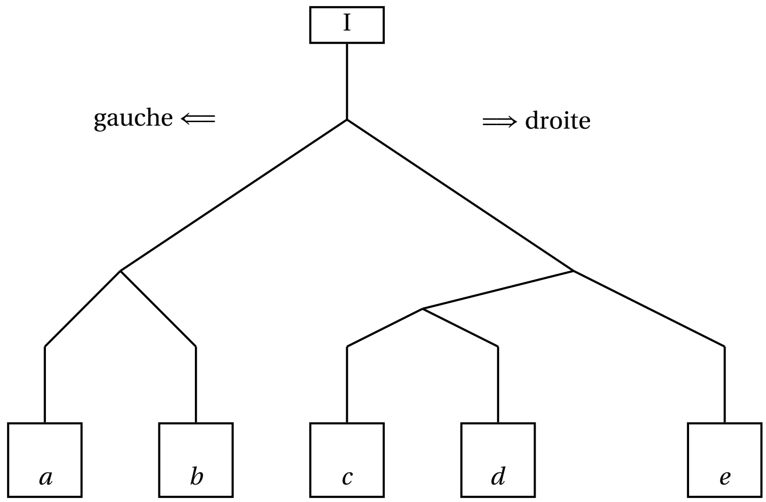
x	10	20	30	40	60	80
y	10	7,8	6	3,5	1,5	0,2

Nuage de points (document 2) :



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



On considère le circuit de billes schématisé par la figure ci-dessus. Un joueur lâche une bille en I et on admet qu'à chaque bifurcation la bille prend la direction gauche avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.

1. Réaliser un arbre pondéré modélisant cette expérience aléatoire.

2. a. Utiliser cet arbre pour déterminer les probabilités des évènements élémentaires suivants, sous forme de fractions irréductibles :
A : « La bille arrive en a » ;
B : « La bille arrive en b » ;
C : « La bille arrive en c » ;
D : « La bille arrive en d » ;
E : « La bille arrive en e ».
Vérifier que la probabilité de l'évènement D est $\frac{9}{64}$.

b. Parmi les évènements précédents, quel est l'évènement le moins probable ? Le plus probable ?

3. Le joueur gagne 48 points si la bille arrive en a, 16 points si elle arrive en b et 64 points si elle arrive en c. Il ne gagne rien si la bille arrive en d et il perd 32 points si elle arrive en e.

a. On note X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus : ainsi si la bille arrive en e, on a $X = -32$. En utilisant les résultats de la deuxième question, donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer alors $\text{E}(X)$, espérance mathématique de X. Le joueur a-t-il intérêt à jouer ?

c. L'organisateur du jeu se doit de proposer un jeu équitable (c'est-à-dire tel que $\text{E}(X) = 0$). Pour cela il décide de modifier le nombre de points perdus si la bille arrive en e. Quel nombre de points perdus doit-il choisir pour que $\text{E}(X) = 0$?

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme

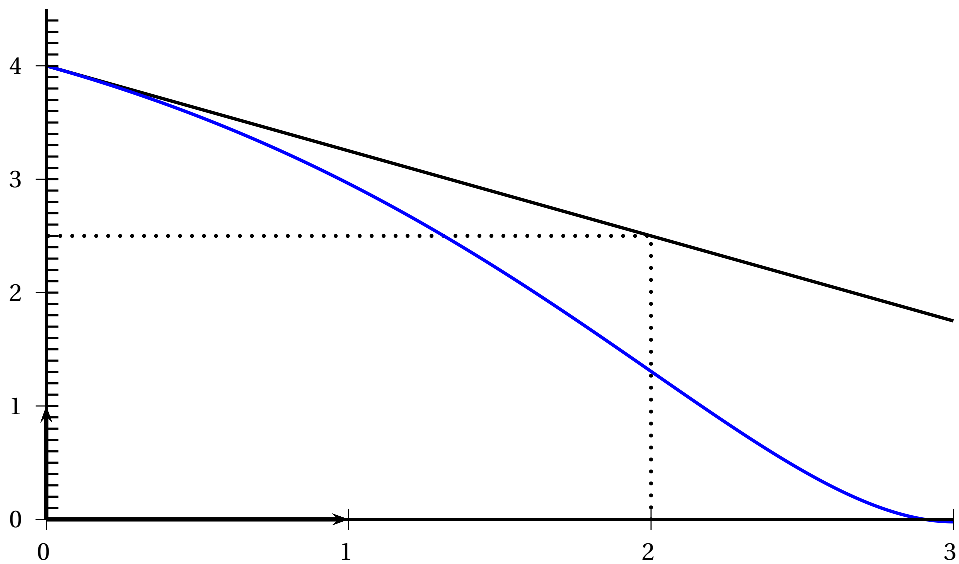
$$f(x) = k + \frac{1}{4}(ax + b)\text{e}^{x},$$

où a, b et k sont des nombres réels que l'on se propose de déterminer dans la **partie A**.

Partie A

Sur la figure ci-dessous, on peut lire la représentation graphique de la fonction f obtenue sur l'intervalle $[0\,;\,3]$ à l'aide d'un logiciel de tracé ou d'une calculatrice graphique. On précise que :

- A est le point de la courbe d'abscisse 3,
- Au point A, la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses,
- Le point B(0 ; 4) est un point de la courbe,
- La droite (BC) est tangente à la courbe au point B, avec C (2 ; 2,5).



1. Déterminer une équation de la droite (BC).
2. Donner les valeurs des nombres $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(3)$.
3. Calculer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a, b et k, f' désignant la fonction dérivée de f.
4. Déduire des résultats des questions **2.** et **3.** les valeurs des réels a, b et k. Vérifier que pour tout x réel : $f(x) = 5 + \frac{1}{4}(x-4)\mathrm{e}^x$.

Partie B

On étudie maintenant la fonction f définie par : $f(x) = 5 + \frac{1}{4}(x-4)\mathrm{e}^x$ sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer $f(3)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près. Confronter ce résultat à la figure de la première partie.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = (5 - \mathrm{e}^x) + \frac{1}{4}x\mathrm{e}^x$ et en déduire la limite de f en $-\infty$ (on rappelle que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$).
   Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?
3. **a.** Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

   b. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe la droite Δ, d'équation $y = 5$, en un point E dont on précisera les coordonnées.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ (unités graphiques : 1 cm sur $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}\right)$ et 2 cm sur $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\jmath}\right)$.

5. En utilisant une observation graphique et la remarque de la question **1** de la **partie B**, indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ (on ne demande pas de résoudre cette équation mais il faut justifier succinctement la réponse).

Partie C

1. Vérifier graphiquement que, pour tout réel x dans l'intervalle $[-2 ; 2]$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 5.$$

2. Démontrer que la fonction g, définie par $g(x) = (x-1)\text{e}^x$, est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h : x \longmapsto x\text{e}^x$.

3. **a.** Vérifier que, pour tout réel x, on a : $5 - f(x) = \text{e}^x - \dfrac{1}{4}x\text{e}^x$.

b. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe et les droites d'équations $x = -2$, $x = 2$ et $y = 5$. On hachurera ce domaine sur le graphique et on donnera un résultat exact, puis approché à 10^{-2} près.