Baccalauréat ES Amérique du Nord juin 2001

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans cet exercice les probabilités demandées seront données sous forme décimale, éventuellement arrondies à 10^{-3} *près.*
Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60 % des élèves sont des filles. De plus 40 % des filles et 30 % des garçons fument.

1. On choisit un élève au hasard. On note A l'évènement « L'élève choisi fume », et $P(A)$ la probabilité de cet évènement.
On note F l'évènement : « L'élève choisi est une fille ».
Quelle est la probabilité que :
   a. Cet élève soit un garçon ?
   b. Cet élève soit une fille qui fume ?
   c. Cet élève soit un garçon qui fume ?

2. Déduire des questions précédentes, en le justifiant, que $P(A) = 0,36$.

3. L'enquête permet de savoir que :
• Parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument ;
• Parmi les élèves non fumeurs, 65 % ont des parents non fumeurs.
On note B l'évènement : « L'élève choisi a des parents fumeurs ».
On notera $P(C/D)$ la probabilité de l'évènement C sachant l'évènement D. Dans cette question, on pourra s'aider d'un arbre pondéré.
   a. Calculer les probabilités $P(A \cap B)$ et $P\left(\overline{A} \cap \mathrm{B}\right)$. En déduire $P(B)$.
   b. Calculer $P(A/B)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.
   Calculer $\mathrm{P}\left(A/\overline{B}\right)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.
   Quelle remarque amène la comparaison de ces deux résultats ?

4. On rappelle que, pour chaque élève choisi, la probabilité qu'il soit fumeur est égale à 0,36. On choisit quatre élèves de terminale au hasard. On admettra que la population d'élèves de terminale est suffisamment grande pour que le choix d'élèves au hasard soit assimilé à un tirage avec remise.
Quelle est la probabilité qu'aucun de ces quatre élèves ne soit fumeur ?

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans tout l'exercice les sommes seront données arrondies au franc le plus proche.

Un directeur du personnel propose à l'un de ses employés de choisir entre deux formes d'augmentation de salaire.
Sachant que son salaire actuel est de 6 000 F par mois, il lui propose soit une augmentation régulière de 55 F tous les mois (première proposition), soit une augmentation de 0,8 % tous les mois (deuxième proposition).

1. On se place dans le cadre de la première proposition et on note M_n le salaire en francs au bout de n mois.
   a. Vérifier que M_1 est égal à 6 055. Montrer que la suite (M_n) définie pour tout entier naturel n est une suite arithmétique dont on donnera la raison.
   b. Donner l'expression de M_n en fonction de n.

c. Calculer $M_{12},\ M_{24},\ M_{36},\ M_{48}$.

2. On se place dans le cadre de la deuxième proposition et on note M'_n le salaire en francs au bout de n mois.

a. Montrer que la suite $\left(M'_n\right)$ définie pour tout entier naturel n est une suite géométrique de raison 1,008. Calculer M'_1.

b. Donner l'expression de M'_n en fonction de n.

c. Calculer $M'_{12},\ M'_{24},\ M'_{36},\ M'_{48}$.

3. Quelle proposition permet d'obtenir le meilleur salaire mensuel au bout de trois ans ?

4. Avant de choisir une des deux propositions, le salarié compare la somme des salaires perçus.
Pour la proposition 1, on note S_n la somme des salaires sur les n premiers mois, de M_1 à M_n.
Pour la proposition 2, on note S'_n la somme des salaires sur les n premiers mois.

a. Exprimer S_n et S'_n en fonction de n.

b. Calculer $S_{36},\ S_{48},\ S_{60}$ et $S'_{36},\ S'_{48},\ S'_{60}$.

c. Le salarié pense rester encore cinq ans dans l'entreprise.
S'il s'intéresse au montant total des salaires perçus, quelle proposition va-t-il choisir ?

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un client dispose d'un capital de 20 000 F sur un compte bancaire. Ce capital ne lui rapporte pas d'intérêt et il l'utilise de la façon suivante :

- chaque début de mois, il retire 10 % de son capital ;
- le dernier jour de chaque mois il reverse 1 000 francs sur ce compte.

L'exercice a pour but de comprendre l'évolution de son capital.

1. On appelle C_0 le capital détenu au 31 décembre 2000 et C_n le capital détenu au bout de n mois, ces sommes étant exprimées en francs.

a. Vérifier que $C_1 = 19000$ et que $C_2 = 18100$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $C_{n+1} = 0,9C_n + 1000$.

c. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $C_n > 10000$. En déduire le signe de $C_{n+1} - C_n$, puis le sens de variation de la suite (C_n).

2. On considère la suite (U_n) définie par $U_n = C_n - 10000$.

a. Montrer que la suite (U_n), définie pour $n > 0$, est une suite géométrique dont on précisera le premier terme U_0 et la raison.

b. En déduire l'expression générale de U_n en fonction de n. Montrer que $C_n = 10000(0,9^n + 1)$.

c. Quelle est la limite de la suite (C_n) ?

d. Calculer la valeur de C_{12} arrondie au centime le plus proche. En déduire la somme totale qui a été retirée du compte durant l'année 2001.

PROBLÈME — 10 points

Étude d'une série statistique

Partie A

Le nombre d'utilisateurs de téléphone portable en France est donné par le tableau suivant :

Mois	12/1996	10/1997	05/1998	10/1998	02/1999	07/1999	09/1999	03/2000
Rang x_i	0	10	17	22	26	31	33	39
Millions d'utilisateurs y_i	2,5	4,5	7,2	9,4	12	15	16,2	22,6

*L*es calculs seront effectués avec la calculatrice, aucun détail de ces calculs n'est demandé.

1. **Réalisation d'un ajustement affine**
   a. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal où 1 cm représente quatre mois sur l'axe des abscisses, 1 cm représente 1 million d'utilisateurs sur l'axe des ordonnées.
   b. Donner la valeur approchée à 10^{-3} près par défaut du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.
   Un ajustement affine est-il justifié ?
   c. Placer le point moyen G de cette série $(x_i\ ;\ y_i)$, après avoir déterminé ses coordonnées.
   d. Donner l'équation de la droite (D) de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$, a et b étant arrondis à 10^{-2} près.
   Tracer cette droite (D) sur le graphique précédent.
2. **Réalisation d'un autre ajustement**
   On considère le tableau suivant :

Mois	12/1996	10/1997	05/1998	10/1998	02/1999	07/1999	09/1999	03/2000
Rang x_i	0	10	17	22	26	31	33	39
$z_i = \ln(y_i)$	$\ln(2,5)$	$\ln(4,5)$	$\ln(7,2)$	$\ln(9,4)$	$\ln(12)$	$\ln(15)$	$\ln(16,2)$	$\ln(22,6)$

   Soit la série statistique $(x_i\ ;\ z_i)$, où $z_i = \ln(y_i)$.
   a. On admet qu'une équation de la droite de régression de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, est $z = 0,056x + 0,961$, avec $z = \ln(y)$.
   Exprimer y en fonction de x. Mettre y sous la forme $y = \alpha e^{0,056x}$.
   Donner la valeur décimale de α arrondie à 10^{-1} près.
   b. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,50]$ par $g(x) = 2,6e^{0,056x}$. En vous aidant de la calculatrice, tracer avec soin et sans justification la courbe représentative (C) de la fonction g sur le graphique précédent, pour x compris entre 0 et 50.
3. À partir du graphique, quel ajustement semble être le meilleur ?

Partie B

On se propose de comparer par le calcul les deux ajustements. Pour cela on considère les fonctions f, g et h définies sur l'intervalle $[0\,;\,50]$ par

$$f(x) = 0,5x + 0,08\ ;\ g(x) = 2,6e^{0,056x}\ ;\ h(x) = g(x) - f(x).$$

1. Résoudre l'inéquation $g(x) > 35$. En déduire l'année et le mois à partir desquels il y aura, d'après le second modèle, plus de 35 millions d'utilisateurs de téléphone portable en France.
2. **a.** Soit h' la fonction dérivée de la fonction h.
   Montrer que $h'(x) = 0,1456e^{0,056x} - 0,5$.
   b. Résoudre l'équation $h'(x) = 0$. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi entier, de la solution x_0 de cette équation.
   c. Justifier le signe de $h'(x)$, puis établir le tableau de variation de h sur l'intervalle $[0\,;\,50]$. On donnera les valeurs arrondies à 10^{-2} près de $h(0)$, $h(x_0)$,
   $h(50)$. Pour calculer $h(x_0)$, on remplacera x_0 par son arrondi entier.
   d. En remarquant que $h'(x) = g'(x) - f'(x)$, montrer que $g'(x_0) = 0,5$.
   e. Soit (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse x_0. Que dire des droites (T) et (D) ?
   Tracer la droite (T).
   f. Que représente la valeur x_0 lorsqu'on compare les fonctions f et g considérées dans chacun des deux ajustements ?

3. **a.** En utilisant les variations de h, démontrer que la fonction h s'annule pour deux valeurs x_1 et x_2 de l'intervalle $[0\,;\,50]$.

b. Encadrer x_1 par deux entiers successifs. Faire de même pour x_2.

c. Placer les valeurs x_1 et x_2 sur le graphique. Que représentent ces valeurs lorsqu'on compare les fonctions considérées dans les deux ajustements ?