∽ Baccalauréat ES Amérique du Nord juin 2000 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne l'évolution du pourcentage de logiciels piratés en France de 1990 à 1998. On désigne par x le rang de l'année et par y le pourcentage de logiciels piratés.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Pourcentage y_i	85	78	73	66	57	51	47	44	43

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal tel que :
   - 1 cm représente un an sur l'axe des abscisses
   - 1 cm représente 5 % sur l'axe des ordonnées.
2. Dans cette question les résultats seront obtenus à l'aide d'une calculatrice et arrondis au millième. Aucun détail des calculs statistiques n'est demandé.
   a. Donner le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.
   Un ajustement affine est-il justifié ?
   b. Écrire une équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode des moindres carrés.
   Représenter (D) dans le repère précédent.
   c. En utilisant cet ajustement affine, donner une estimation du pourcentage de logiciels piratés en 2004.
3. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel.
   On pose $z = \ln(y)$.
   À l'aide d'une calculatrice, on a obtenu les résultats suivants :
   — Le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i\ ;\ z_i)$, où $z_i = \ln\left(y_i\right)$, est $r' = -0,991$.
   — Une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés est $z = 0,093x + 4,444$ (1).
   En utilisant la relation (1), donner une estimation du pourcentage de logiciels piratés en 2004.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablettes, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 60 % permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40 % exactement deux places de cinéma.
La notation $p(\text{A}/\text{B})$ désigne la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

1. Un client achète une tablette de chocolat. On considère les évènements suivants :
   G : « Le client achète une tablette gagnante » ;
   U : « Le client gagne exactement une place de cinéma » ;
   D : « Le client gagne exactement deux places de cinéma ».

   a. Donner $p(G)$, $p(U/G)$ et $p(D/G)$.

b. Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0,3.

c. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnées par le client.
Déterminer la loi de probabilité de X.
Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un client achète deux jours de suite une tablette de chocolat. Les deux achats sont indépendants.

a. Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma.

b. Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma.

c. Montrer que la probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est égale à 0,29 (on pourra s'aider d'un arbre).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les résultats de cet exercice seront donnés sous forme décimale arrondie au centième.
Un camp d'adolescents propose des stages d'activités nautiques pour débutants avec, au choix : planche à voile, plongée ou ski nautique.
Lors d'un stage donné, ce camp accueille vingt jeunes dont sept seront initiés à la planche à voile, huit à la plongée et cinq au ski nautique. Chaque stagiaire ne pratique qu'une seule des trois activités.

1. On forme un groupe de trois stagiaires choisis au hasard parmi les vingt.

a. Combien de groupes est-il possible de former ?

b. Déterminer la probabilité de chacun des évènements A, B et C suivants :

— A « Les trois stagiaires pratiquent des activités différentes » ;
— B « Les trois stagiaires pratiquent la même activité » ;
— C « Au moins l'un des trois stagiaires pratique le ski nautique ».

2. Parmi les vingt stagiaires, un seul se prénomme Christian. Chaque jour, on choisit au hasard un groupe de trois stagiaires chargé du service au repas de midi.

a. Montrer que la probabilité que Christian soit choisi un jour donné pour le service de midi est égale à 0,15.

b. La durée du stage est de cinq jours.

- Quelle est la probabilité de ne jamais choisir Christian pour le service de midi pendant tout le séjour ?
- Quelle est la probabilité de le choisir exactement une fois ?
- En déduire que la probabilité de choisir Christian au moins deux fois est inférieure à 0,2.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$f(x) = -x + 7 + 6\ln(2x+1) - 6\ln(2x+2).$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Justifier que f est définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

2. Déterminer la limite de f en $-\dfrac{1}{2}$.
   En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote une droite (D) dont on précisera une équation.
3. En remarquant que, pour tout x de l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$
$$6\ln(2x+1)-6\ln(2x+2)=6\ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right).$$
   déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Soit (Δ) la droite d'équation : $y=-x+7$.
   a. Quelle est la limite de $\left[f(x)-(-x+7)\right]$ lorsque x tend vers $+\infty$
   En donner une interprétation graphique.
   b. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (Δ).
5. **a.** Montrer que, pour tout x de l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$
$$f'(x)=\frac{-2x^2-3x+5}{(2x+1)(x+1)}$$
   où f' désigne la fonction dérivée de f.
   b. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f.
6. Soit (T) la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point M d'abscisse 0.
   Déterminer une équation de la droite (T).
7. Tracer les droites $(D), (\Delta), (T)$ et la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique 2 cm.
   On placera l'axe des ordonnées à 2 cm du bord gauche de la feuille de papier millimétré.

Partie B

1. Soit H la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par :
$$H(x)=(2x+1)\ln(2x+1)-(2x+2)\ln(2x+2).$$
   Montrer que la fonction H est une primitive sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ de la fonction h définie sur cet intervalle par : $h(x)=2\ln\left(\dfrac{2x+1}{2x+2}\right)$.
2. On note (E) la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x=2$ et $x=5$.
   a. Hachurer (E) sur la figure.
   b. Calculer la valeur exacte de l'aire de (E) en unités d'aire.
   c. Calculer l'aire de (E) en cm^2 (on rappelle que l'unité graphique est 2 cm). On donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième.