Baccalauréat S Amérique du Nord juin 1998

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Afin de créer une loterie, on met dans une urne n billets différents (n supérieur ou égal à 3), dont deux et deux seulement sont gagnants.

1. Dans cette question, on choisit au hasard et simultanément deux billes dans l'urne.

a. On suppose ici $n = 10$. X désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis.

Déterminer la loi de probabilité de X.

b. On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3.

Calculer la probabilité notée p_n, d'avoir exactement un billet gagnant parmi des deux choisis.

2. Dans cette question, on choisit au hasard deux billets dans cette urne en remettant le premier billet tiré avant de tirer le second.

a. On suppose ici $n = 10$. Y désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis. Déterminer la loi de probabilité de Y.

b. On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3. Calculer la probabilité, notée q_n d avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

3. a. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 3, on a :

$$p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}.$$

b. En remarquant que pour tout entier n, $n-2$ est inférieur à $n-1$, déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0, on ait $p_n - q_n < 10^{-3}$.

c. Pour obtenir exactement un billet gagnant en choisissant deux billets de cette loterie, est-il préférable de les tirer simultanément ou de les tirer l'un après l'autre en remettant le premier billet tiré ?

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, (unité graphique : 4 cm), on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et $\frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour chaque point M du plan, d'affixe z, M_1 d'affixe z_1, désigne l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis M' d'affixe z' l'image de M_1 par la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Enfin, on note T la transformation qui à chaque point M associe le point M'.

1. a. Démontrer : $z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}z - 1$.

b. Déterminer l'image du point B.

c. Montrer que T admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe.

2. On pose $z = x + \text{i}y$, avec x et y réels.

a. Pour z non nul, calculer la partie réelle du quotient $\dfrac{z'}{z}$ en fonction de x et de y.

b. Démontrer que l'ensemble (E), des points M du plan tels que le triangle OMM' soit rectangle en O, est un cercle (C), dont on précisera le centre et le rayon, privé de deux points.

Tracer (E).

3. Dans cette question on pose $z = 1 + \mathrm{i}$.

a. Vérifier que M appartient à (E). Placer M et M' sur la figure.

b. Calculer le module de z'.

c. Calculer l'aire, en cm^2, du triangle OMM'.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on donne un carré ABCD de sens direct tel que AB = 1 (sur la figure, on prendra 9 cm comme unité graphique) et les points $\mathrm{A_1}$ et $\mathrm{B_1}$ définis par :

$$\overrightarrow{\mathrm{AA_1}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{BB_1}} = \frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{BC}}.$$

On rapporte le plan au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{A}\,;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$.

On désigne par S la similitude plane directe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M_1 d'affixe z_1 définie par :

$$z_1 = \frac{6+2\mathrm{i}}{9}z + \frac{1}{3}.$$

1. Calculer l'affixe du centre Ω de la similitude S. On ne demande pas de calculer le rapport ni l'angle θ de la similitude.

2. **a.** Déterminer les images des points A et B par la similitude S.

b. Calculer l'affixe du point $\mathrm{D_1}$ image de D par S.

c. Montrer que le point $\mathrm{D_1}$ appartient au segment $[\mathrm{DA_1}]$.

d. Placer $\mathrm{D_1}$ puis $\mathrm{C_1}$ image de C par S.

3. **a.** Démontrer que : $\left(\overrightarrow{\mathrm{DA}},\ \overrightarrow{\mathrm{DA_1}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{A_1B}},\ \overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}\right) = \theta \quad (\text{modulo } 2\pi)$.

b. En déduire une construction géométrique de Ω.

Problème **10 points**

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n, qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 + n\ln x}{x^2}.$$

Partie A

I. Étude des fonctions f_n

1. Calculer $f_n'(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n - 2 - 2n\ln x$.

2. Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$. Étudier le signe de $f_n'(x)$.
3. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
4. Établir le tableau de variations de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

II. Représentation graphique de quelques fonctions f_n.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, (unité graphique : 5 cm).
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

1. Tracer $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.
2. **a.** Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n ?
   b. Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe $\mathscr{C}_4$ à partir de $\mathscr{C}_2$ et tracer $\mathscr{C}_3$.
   Tracer $\mathscr{C}_4$.

Partie B : Calculs d'aires

1. Calculer en intégrant par parties, l'intégrale $\text{I} = \displaystyle\int_1^{\text{e}} \ln x \,\text{d}x$.
2. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes $\mathscr{C}_n$, $\mathscr{C}_{n+1}$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \text{e}$.
3. On note $\mathscr{A}_n$ l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}_n$, et les droites d'équation $y = 0$, $x = 1$ et $x = \text{e}$.
   a. Calculer $\mathscr{A}_2$.
   b. Déterminer la nature de la suite $\mathscr{A}_n$ en précisant l'interprétation graphique de la raison.

Partie C : Étude sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ de l'équation $f_n(x) = 1$

Dans toute la suite, on prendra $n \geqslant 3$.

1. **a.** Vérifier que pour tout n, $\text{e}^{\frac{n-2}{2n}} > 1$ et $f_n\left(\text{e}^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$.
   b. Vérifier que l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1~;~\text{e}^{\frac{n-2}{2n}}\right[$.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet sur l'intervalle $\left[\text{e}^{\frac{n-2}{2n}}~;~+\infty\right[$ exactement une solution notée α_n.
3. On se propose de déterminer la limite de la suite α_n.
   a. Calculer $f\left(\sqrt{n}\right)$ et montrer que pour tout $n > \text{e}^2$, on a $f_n\left(\sqrt{n}\right) \geqslant 1$.
   b. En déduire que, pour $n \geqslant 8$, on a $\alpha_n \geqslant \sqrt{n}$ et donner la limite de la suite (α_n).