Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Nord juin 1995

EXERCICE 1 **5 POINTS**

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
Le plan est muni d'un repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ orthonormal direct.
On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) :

$$z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = 0.$$

1. **a.** Vérifier que 4 est solution de l'équation (E).
   b. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout z complexe :

   $$z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = (z-4)\left(az^2 + bz + c\right).$$

   c. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ et exprimer les solutions sous forme trigonométrique.
2. p étant un réel strictement positif, on note $\left(\text{E}_p\right)$ l'équation suivante :

   $$z(z-4)\left(z^2 - 4z + 4 + p^2\right) = 0.$$

   a. Montrer que les points du plan dont les affixes sont solutions de $\left(\text{E}_p\right)$ sont les sommets d'un losange dont l'aire vaut $4p$ unités d'aire.
   b. Dessiner ce losange dans le cas où $p = 2$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**
Enseignement obligatoire

Un jeu consiste à extraire, au hasard et simultanément, 3 boules d'une urne contenant 5 boules rouges et 5 boules vertes.
Si le joueur obtient 3 boules rouges, évènement que l'on note R_3 il gagne 100 euros.
S'il obtient 2 boules rouges et 1 boule verte, évènement que l'on note R_2, il gagne 60 euros.
Enfin, s'il obtient strictement moins de 2 boules rouges, il ne gagne rien et on note cet évènement E.

1. Montrer que les probabilités des évènements R_2 et R_3 sont :

   $$p\left(R_2\right) = \frac{5}{12} \quad \text{et} \quad p\left(R_3\right) = \frac{1}{12}.$$

2. On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.
3. Dans cette question, on modifie les règles du jeu de la façon suivante :
   — Si le joueur réalise les évènements R_3 ou R_2 il ne gagne plus d'argent immédiatement, mais il est qualifié pour la suite du jeu que l'on appelle « Banco ».

— Si l'évènement E est réalisé, le joueur ne gagne rien et n'est pas qualifié pour le « Banco ».

Le « Banco » consiste à extraire une boule parmi les sept restées dans l'urne ; si celle-ci est verte, le joueur empoche les 200 euros du « Banco », et si elle est rouge, le joueur a perdu mais repart avec une prime de consolation de 40 euros.

a. Quelle est la probabilité d'empocher les 200 euros du « Banco » sachant que R_3 est réalisé ?

b. Quelle est la probabilité d'empocher les 200 euros du « Banco » sachant que R_2 est réalisé ?

c. En déduire la probabilité d'empocher les 200 euros du « Banco ».

On note Y la variable aléatoire donnant le gain du joueur dans ce nouveau jeu : Y peut donc prendre les valeurs 0, 40 ou 200.

Établir la loi de probabilité de Y.

Calculer l'espérance mathématique de Y et comparer avec celle de X.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Enseignement de spécialité

Soient O, A et B trois points distincts du plan orienté. On note θ une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right)$. On supposera que θ est compris strictement entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère les rectangles (OPQA) et (OBRS) tels que :

$\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OP}}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$; $\quad \text{OP} = 2\text{OA}$

et $\left(\overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OS}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$; $\quad \text{OS} = \dfrac{\text{OB}}{2}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (PB) et (QR) se coupent en un point que l'on note I, et que I appartient au cercle circonscrit au rectangle (OBRS).

1. Faire une figure avec les éléments cités ci-dessus.

2. Soit f la similitude directe de centre O d'angle $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ et de rapport $\dfrac{\text{OB}}{2\text{OA}}$.

a. Déterminer les images par f des points O, P, A et en déduire celle du point Q.

b. Grâce à ce qui précède comparer le angles $\left(\overrightarrow{\text{OP}}, \overrightarrow{\text{OQ}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OR}}\right)$ ainsi que les rapports $\dfrac{\text{OQ}}{\text{OP}}$ et $\dfrac{\text{OR}}{\text{OB}}$.

3. On munit le plan d'un repère orthonormal direct dont l'origine est le point O et on note z_{P}, z_{Q}, z_{B} et z_{R} les affixes des points P, Q, B et R.

a. Montrer que : $\dfrac{z_{\text{Q}}}{z_{\text{P}}} = \dfrac{z_{\text{R}}}{z_{\text{B}}}$.

b. Montrer que l'égalité : $\dfrac{z_{\text{R}}}{z_{\text{B}}} = \dfrac{z_{\text{R}} - z_{\text{Q}}}{z_{\text{B}} - z_{\text{P}}}$ équivaut a celle démontrée à la question précédente,

c. En déduire l'existence du point I et la cocyclicité des points O, I, B, R.

Conclure.

PROBLÈME **11 POINTS**

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
Soit f l'application définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x - 4 + \frac{\ln x}{4}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer les limites de f aux bornes de $]0~;~+\infty[$.
Justifier que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote et en donner une équation.

2. **a.** Étudier les variations de f sur $]0~;~+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
b. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $\text{I} = [3~;4]$.
c. Tracer $\mathscr{C}_f$.

3. Soit g l'application définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = 4 - \frac{\ln x}{4}.$$

a. Montrer que α est solution de l'équation : $g(x) = x$.
b. Montrer que l'image de l'intervalle I par g est incluse dans I.
c. Montrer que pour tout élément x appartenant à I : $\left|g'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{12}$.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = g(u_n)$.
a. En utilisant 3., montrer par récurrence que : pour tout entier naturel n, u_n est élément de I.
b. Prouver que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{12}|u_n - \alpha|.$$

En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{12^n}.$$

Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
c. Résoudre sur $]0~;~+\infty[$ l'inéquation : $\dfrac{1}{12^x} \leqslant 10^{-3}$.
En déduire que u_3 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

5. Soit $\mathscr{D}$ le domaine limité par $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 4$.
a. Calculer, pour $x > 0$, la dérivée de $x \longmapsto x\ln x$.
b. En utilisant le résultat du a., exprimer l'aire en cm^2 du domaine $\mathscr{D}$ à l'aide d'un polynôme du second degré en α.