

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Amérique du Nord juin 1995 ∞

EXERCICE 1

5 POINTS

\mathbb{C} désigne l'ensemble des nombres complexes.

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct.

On considère, dans \mathbb{C} , l'équation (E) :

$$z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = 0.$$

1. a. Vérifier que 4 est solution de l'équation (E).
- b. Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout z complexe :

$$z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = (z - 4)(az^2 + bz + c).$$

- c. Résoudre l'équation (E) dans \mathbb{C} et exprimer les solutions sous forme trigonométrique.
2. p étant un réel strictement positif, on note (E_p) l'équation suivante :

$$z(z - 4)(z^2 - 4z + 4 + p^2) = 0.$$

- a. Montrer que les points du plan dont les affixes sont solutions de (E_p) sont les sommets d'un losange dont l'aire vaut $4p$ unités d'aire.
- b. Dessiner ce losange dans le cas où $p = 2$.

EXERCICE 2

4 POINTS

Enseignement obligatoire

Un jeu consiste à extraire, au hasard et simultanément, 3 boules d'une urne contenant 5 boules rouges et 5 boules vertes.

Si le joueur obtient 3 boules rouges, évènement que l'on note R_3 il gagne 100 euros.

S'il obtient 2 boules rouges et 1 boule verte, évènement que l'on note R_2 , il gagne 60 euros.

Enfin, s'il obtient strictement moins de 2 boules rouges, il ne gagne rien et on note cet évènement E .

1. Montrer que les probabilités des évènements R_2 et R_3 sont :

$$p(R_2) = \frac{5}{12} \quad \text{et} \quad p(R_3) = \frac{1}{12}.$$

2. On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.
3. Dans cette question, on modifie les règles du jeu de la façon suivante :
— Si le joueur réalise les évènements R_3 ou R_2 il ne gagne plus d'argent immédiatement, mais il est qualifié pour la suite du jeu que l'on appelle « Banco ».

— Si l'évènement E est réalisé, le joueur ne gagne rien et n'est pas qualifié pour le « Banco ».

Le « Banco » consiste à extraire une boule parmi les sept restées dans l'urne ; si celle-ci est verte, le joueur empoche les 200 euros du « Banco », et si elle est rouge, le joueur a perdu mais repart avec une prime de consolation de 40 euros.

- Quelle est la probabilité d'empocher les 200 euros du « Banco » sachant que R_3 est réalisé ?
- Quelle est la probabilité d'empocher les 200 euros du « Banco » sachant que R_2 est réalisé ?
- En déduire la probabilité d'empocher les 200 euros du « Banco ».

On note Y la variable aléatoire donnant le gain du joueur dans ce nouveau jeu : Y peut donc prendre les valeurs 0, 40 ou 200.

Établir la loi de probabilité de Y .

Calculer l'espérance mathématique de Y et comparer avec celle de X .

EXERCICE 2

4 POINTS

Enseignement de spécialité

Soient O , A et B trois points distincts du plan orienté. On note θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. On supposera que θ est compris strictement entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

On considère les rectangles $(OPQA)$ et $(OBRS)$ tels que :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = -\frac{\pi}{2}; \quad OP = 2OA$$

$$\text{et } (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}) = \frac{\pi}{2}; \quad OS = \frac{OB}{2}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (PB) et (QR) se coupent en un point que l'on note I , et que I appartient au cercle circonscrit au rectangle $(OBRS)$.

- Faire une figure avec les éléments cités ci-dessus.
- Soit f la similitude directe de centre O d'angle $\theta + \frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{OB}{2OA}$.
 - Déterminer les images par f des points O , P , A et en déduire celle du point Q .
 - Grâce à ce qui précède comparer les angles $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OR})$ ainsi que les rapports $\frac{OQ}{OP}$ et $\frac{OR}{OB}$.
- On munit le plan d'un repère orthonormal direct dont l'origine est le point O et on note z_P , z_Q , z_B et z_R les affixes des points P , Q , B et R .
 - Montrer que : $\frac{z_Q}{z_P} = \frac{z_R}{z_B}$.
 - Montrer que l'égalité : $\frac{z_R}{z_B} = \frac{z_R - z_Q}{z_B - z_P}$ équivaut à celle démontrée à la question précédente,
 - En déduire l'existence du point I et la cocyclicité des points O , I , B , R .
Conclure.

PROBLÈME**11 POINTS**

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Soit f l'application définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x - 4 + \frac{\ln x}{4}$$

et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

1. Calculer les limites de f aux bornes de $]0; +\infty[$.
Justifier que \mathcal{C}_f admet une asymptote et en donner une équation.
2. **a.** Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
b. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $I =]3; 4[$.
c. Tracer \mathcal{C}_f .
3. Soit g l'application définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 4 - \frac{\ln x}{4}.$$

- a.** Montrer que α est solution de l'équation : $g(x) = x$.
- b.** Montrer que l'image de l'intervalle I par g est incluse dans I .
- c.** Montrer que pour tout élément x appartenant à I : $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$.
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n ,
 $u_{n+1} = g(u_n)$.
a. En utilisant 3., montrer par récurrence que : pour tout entier naturel n , u_n est élément de I .
b. Prouver que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12} |u_n - \alpha|.$$

En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}.$$

Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

- c.** Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'inéquation : $\frac{1}{12^x} \leq 10^{-3}$.
En déduire que u_3 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
5. Soit \mathcal{D} le domaine limité par \mathcal{C}_f l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 4$.
a. Calculer, pour $x > 0$, la dérivée de $x \mapsto x \ln x$.
b. En utilisant le résultat du a., exprimer l'aire en cm^2 du domaine \mathcal{D} à l'aide d'un polynôme du second degré en α .