

♣ Baccalauréat S Amérique du Nord mai 2004 ♣

EXERCICE 1

3 points

Commun à tous les candidats

Dans le plan affine, on considère ABC un triangle rectangle en A, I le milieu du segment [AB] et J le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m , différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés

$$S_m = \{(A, 1), (B, m), (C, 2m)\}.$$

Pour tout point M du plan on note $\vec{V}_M = 3\vec{MA} - \vec{MB} - 2\vec{MC}$.

Pour chacune des six affirmations suivantes, dite si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Chaque bonne réponse donne 0,5 point, chaque réponse fausse ou illisible enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Un éventuel total négatif serait ramené à 0.

Répondre aux affirmations sur la page annexe.

Affirmation	V ou F
G_1 est le milieu du segment [CI].	
G_1 est barycentre de $\left\{ (J, 2), \left(C, \frac{2}{3} \right) \right\}$	
Pour tout point M , $\vec{V}_M = \vec{AB} + 2\vec{AC}$.	
Pour tout m , distinct de $-\frac{1}{3}$, \vec{AG}_m est colinéaire à \vec{AG}_{-1} .	
$IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.	
Pour tout point P de (AG_{-1}) , il existe un réel m tel que $P = G_m$.	

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1. On veut résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$(E) : z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0.$$

- a. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :

$$(z-2)(z^2 + az + b) = 0.$$

- b. Résoudre (E)

2. On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant :

$$z^2 - 4 = 4 - \bar{z}^2.$$

- a. On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M .
Montrer que : M appartient à (H) si et seulement si

$$x^2 - y^2 = 4.$$

- b. Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2, $-3 - i\sqrt{5}$ et $-3 + i\sqrt{5}$.
Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

- a. Déterminer les affixes de A' , B' et C' , images respectives de A, B et C par la rotation r (on donnera ces affixes sous la forme algébrique).

- b. On note M' l'image par r du point M d'affixe z . On note z' l'affixe de M' . Les parties réelle et imaginaire de z sont notées x et y , celles de z' sont notées x' et y' . On note (H') l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de (H).

— Exprimer x et y en fonction de x' et y' .

— En utilisant la question 2. a. prouver que : M' appartient à (H') si et seulement si

$$x'y' = -2.$$

4. Faire une figure sur laquelle on placera les points A, B, C, A' , B' , C' , la courbe (H'), puis la courbe (H).

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soient les points A, A' , B et B' d'affixes respectives :

$$z_A = 1 - 2i, z_{A'} = -2 + 4i, z_B = 3 - i, z_{B'} = 5i.$$

1. a. Placer les points A, A' , B et B' dans le plan complexe. Montrer que $ABB'A'$ est un rectangle.
- b. Soit s la réflexion telle que $s(A)=A'$ et $s(B)=B'$. On note (Δ) son axe. Donner une équation de la droite (Δ) et la tracer dans le plan complexe.
- c. On note z' l'affixe du point M' image par s du point M d'affixe z .
Montrer que

$$z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\bar{z} + 2i - 1.$$

2. Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point P d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)\bar{z} + 5 - i.$$

- a. On note C et D les images respectives de A et B par g ; déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plan complexe.
- b. Soit Ω le point d'affixe $1 + i$ et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2 .
Montrer que C et D sont les images respectives de A' et B' par h .
- c. Soit M_1 d'affixe z_1 l'image par h de M , d'affixe z . Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1 .

3. On pose $f = h^{-1} \circ g$.

- a. Déterminer l'expression complexe de f .
- b. Reconnaître f . En déduire une construction du point P , image par g d'un point M quelconque donné du plan.

EXERCICE 3**4 points****Commun à tous les candidats**

Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme suivante :

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule.

Les trente cases, blanches (B), jaunes (J), vertes (V) ou rouges (R), ont toutes la même probabilité d'être atteintes.

- Si la fléchette atteint une case rouge, le joueur gagne 8 euros.
- Si la fléchette atteint une case verte, le joueur gagne 5 euros.
- Si la fléchette atteint une case jaune, le joueur ne gagne rien et ne perd rien.
- Si la fléchette atteint une case blanche, le joueur perd a euros, la lettre a désigne un nombre réel positif.

1. On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).
 - a. Donner la loi de probabilité de X .
 - b. Calculer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance $E(X)$ soit nulle.
2. Un joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.
 - a. Quelle est la probabilité p qu'un joueur gagne?
 - b. Un joueur joue 5 parties consécutives indépendantes. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois? exactement 5 fois?
 - c. Quel est le nombre moyen de parties gagnantes dans la situation décrite en 2. b.?

EXERCICE 4**8 points****Commun à tous les candidats****Partie I**

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(E_n) \quad y' + y = \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h , définies et dérivables sur \mathbb{R} , vérifient, pour tout x réel :

$$g(x) = h(x)e^{-x}.$$

- a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel,

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

- b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n) , sachant que $h(0) = 0$.

Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur \mathbb{R} .
- a. Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :

$$(F) \quad y' + y = 0.$$

- b. Résoudre (F).
- c. Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n) .
- d. Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

Le but de cette partie est de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e \quad (\text{on rappelle que par convention } 0! = 1).$$

1. On pose, pour tout x réel,

$$f_0(x) = e^{-x}, \quad f_1(x) = xe^{-x}.$$

- a. Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.
- b. Pour tout entier strictement positif n , on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
En utilisant la **Partie I**, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geq 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

2. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx. \quad (\text{on ne cherchera pas à calculer } I_n)$$

- a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle $[0; 1]$, l'encadrement :

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}.$$

En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n) .

- b. Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $I_k - I_{k-1} = -\frac{1}{k!} e^{-1}$.
- c. Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que :

$$I_n = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{e^{-1}}{k!}$$

- d. En déduire finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e.$$