∽ Baccalauréat A1 Amérique du Sud décembre 1994 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

On considère les 5 suites numériques suivantes pour tout entier naturel n :

(a_n) définie par $a_n = (-1)^n$;
(b_n) définie par $b_n = n\text{e}^{-n}$;
(c_n) définie par $c_n = \dfrac{n+5}{n+1}$;
(d_n) définie par $\left\{\begin{array}{lcl} d_0 & = & 5 \\ \text{et} & & \\ d_{n+1} & = & d_n - 5 \end{array}\right.$
(u_n) définie par définie par $d_n = \ln\left(n^2 + n + 1\right)$ (où ln représente le logarithme népérien).

On sait que, parmi ces 5 suites,
une et une seule est géométrique ;
une et une seule est minorée par 1 ;
une et une seule est croissante ;
une et une seule converge vers 0.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant. en cochant les cases qui correspondent à une réponse « oui » :

	(a_n)	(b_n)	(c_n)	(d_n)	(u_n)
est géométrique					
est minorée par 1					
est croissante					
converge vers 0					

2. Si le tableau ci-dessus était rempli par un dispositif aléatoire qui, ligne par ligne et de manière indépendante, coche au hasard une case unique par ligne, quelle serait la probabilité qu'il y ait au moins une réponse exacte ?

N. B. : « au hasard » signifie qu'il s'agit d'équiprobabilité.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Soit la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - x^3 - 2\ln x$$

où ln représente le logarithme népérien.

1. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivée de g et établir le tableau de variation de la fonction g.
3. Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.
   En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B

Soit la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par : 2

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2} - 2x + 3.$$

Soit $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 4 cm).

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivée de f.
   Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = 2g(x)$.
   En déduire le signe de $f'(x)$, puis le sens de variation de f.
   Établir le tableau de variation de f.

Partie C

1. Montrer que la droite D d'équation $y = -2x+3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
2. Étudier les positions relatives de D et $\mathscr{C}$.
3. Tracer, dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, la droite D et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie D

1. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :
$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$
2. Calculer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite D et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \dfrac{3}{2}$.