

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1982 ∞

EXERCICE 1

4 points

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$f(x) = -2 + \text{Log} |x^2 - 4| \quad (\text{où Log désigne le logarithme népérien}).$$

1. Étudier les variations de f et la représenter dans un repère orthonormé. Résoudre $f(x) = 0$.
2. Soit $I =]-\infty; -2[$ et soit f_1 la restriction de f à I .
Montrer que f_1 est une bijection de I vers \mathbb{R} et expliciter la bijection réciproque f^{-1} .

EXERCICE 2

4 points

1. Soit a et b deux entiers naturels dont la somme et le produit ont pour PGCD le carré d'un nombre premier p .
 - a. Montrer que p^2 divise a^2 (on pourra remarquer que $a^2 = a(a+b) - ab$). En déduire que p divise a . Montrer que p divise b .
 - b. Démontrer que le PGCD de a et b est, soit p , soit p^2 .
2. On cherche à déterminer les entiers naturels a et b tels que $\text{PGCD}(a+b, ab) = 49$ et $\text{PPCM}(a, b) = 231$.
 - a. Soit a et b deux tels entiers. Montrer que leur PGCD est 7.
 - b. Quelles sont les solutions du problème posé?

PROBLÈME

12 points

Partie A

Soit f la fonction d'une variable numérique réelle définie par

$$f(x) = \frac{x+4}{x-2}.$$

1. Soit P un plan affine euclidien orienté, muni d'un repère orthonormé direct $R = (O; \vec{i}, \vec{j})$. Étudier les variations de f et la représenter graphiquement dans P .
On appellera C la courbe ainsi obtenue.
2. Déterminer l'image par f de l'intervalle $] -\infty; 2[$.
3. Vérifier que pour tout réel x différent de 2, on a

$$f(x) = 1 + \frac{6}{x-2}.$$

En déduire les points de C dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs.

4. Pour chaque entier $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n} \frac{k+4n}{k-2n}.$$

Montrer que S_n est une somme de Riemann de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Partie B

Soit u_1 un nombre réel tel que $u_1 < 2$.

1. Montrer (en utilisant la question A 2.) que l'on peut définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels, dont le premier terme est le nombre u_1 donné et telle que

$$\forall n \geq 2, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{u_n - 2}.$$

2. Pour quelle(s) valeur(s) de u_1 la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle constante? Retrouver ce résultat en utilisant la courbe C tracée dans la partie A.
3. Pour chaque entier $n \geq 1$, on pose

$$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n + 4}.$$

Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie C

1. Déterminer les images respectives \vec{I}' et \vec{J}' des vecteurs \vec{i} et \vec{j} pour la rotation vectorielle dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$.
2. Soit $R' = (O'; \vec{I}', \vec{J}')$, O' étant défini par

$$\vec{OO'} = 2\vec{i} + \vec{j}.$$

Déterminer une équation de la courbe C dans le repère R' .

Déterminer les éléments (foyers, sommets et excentricité) de cette conique C.

Partie D

À tout nombre complexe z différent de 2, on associe le $z+4$ nombre complexe

$$Z = \frac{z+4}{z-2}.$$

1. Exprimer les parties réelle X et imaginaire Y de Z en fonction des parties réelle x et imaginaire y de z .
2. On rappelle qu'à tout nombre complexe z est associé un point M de \mathbb{P} , qui est son image. Déterminer l'ensemble E des points M de \mathbb{P} , images de nombres complexes z tels que Z soit imaginaire pur.
3. Soit λ un nombre réel non nul. Quelle condition doivent vérifier les parties réelle et imaginaire x et y de z pour que les parties réelle et imaginaire X et Y de Z vérifient l'équation

$$Y = \lambda X.$$

Déterminer l'ensemble F_λ des points M de \mathbb{P} images des nombres complexes z vérifiant cette condition. Déterminer, lorsque λ décrit \mathbb{R}^* , l'ensemble des centres des courbes F_λ . Montrer que ces courbes F_λ passent par deux points de \mathbb{P} dont les coordonnées sont indépendantes de λ .