Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Amérique du Sud décembre 1990 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Dans le plan P orienté, on considère un carré ABCD tel que l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}}\right)$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
On désigne par I et K les milieux respectifs des segments [AC] et [CD].
Représenter ces points sur une figure. (On choisira AB = AD = 4 cm.)
On se propose d'étudier la similitude directe S telle que :

$$S(\text{A}) = \text{I} \quad \text{et} \quad S(\text{C}) = \text{K}.$$

1. Recherche géométrique des éléments de S.
   - **a.** Donner le rapport et l'angle de S.
   - **b.** Démontrer que le centre Ω de S est le point d'intersection autre que I des cercles de diamètres [AD] et [IC]. Placer ces cercles et Ω sur la figure.
2. Recherche du centre de S à l'aide des nombres complexes.
   Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{A}~;~\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}}\right)$.
   - **a.** Donner les affixes des points A, C, I et K.
   - **b.** Donner l'écriture complexe de S.
   - **c.** En déduire les coordonnées de Ω.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites distinctes de l'espace.
On note R_1 et R_2 les demi-tours d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2.
Le but de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur Δ_1 et Δ_2 pour que $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.

1. On suppose que Δ_1 et Δ_2 sont sécantes en un point noté O et sont orthogonales. On note Δ la droite orthogonale en O au plan P contenant Δ_1 et Δ_2.
   On note P_1 et P_2 les plans passant par Δ et contenant respectivement Δ_1 et Δ_2.
   - **a.** Faire une figure.
   - **b.** On note S_P, S_{P_1} et S_{P_2} les réflexions par rapport aux plans P, P_1 et P_2. Déterminer SP ? SP1 et SP2 ? SP.
   - **c.** En déduire que $R_2 \circ R_1$ est le demi-tour R_Δ d'axe Δ.
   - **d.** Prouver que $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.
2. Réciproquement, on suppose que $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.
   Soient A un point de Δ_1 qui n'appartient pas à Δ_2 et B l'image de A par R_2.
   - **a.** Montrer que la droite (AB) et la droite Δ_2 sont sécantes et orthogonales.
   - **b.** En utilisant la relation $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$, prouver que $\text{B} = R_1(\text{B})$.
   - **c.** En déduire que Δ_1 et Δ_2 sont sécantes et orthogonales.

PROBLÈME **12 points**

Le problème propose :
Dans la partie A : l'étude d'une fonction numérique f et de l'équation $f(x) = x$.
Dans les parties B et C : la construction de deux suites convergeant avec des rapidités différentes vers la solution de l'équation précédente.
Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (l'unité graphique sera précisée lorsqu'une représentation sera demandée.

Partie A

Soit f la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

1. Déterminer le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$ et les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Tracer (figure numéro 1) la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f et la droite Δ d'équation $y = x$. (Unité graphique : 1 cm).
3. On s'intéresse à l'intersection de $\mathcal{C}$ et de Δ.
   On pose, pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - x$.
   - **a.** Déterminer le sens de variation de φ sur $]0 ; +\infty[$ et les limites de φ en 0 et en $+\infty$.
   - **b.** En déduire que la droite Δ coupe la courbe $\mathcal{C}$ en un point et un seul qu'on notera I.
     On désigne par α l'abscisse de ce point. Vérifier l'encadrement :

$$0,7 < \alpha < 0,9.$$

Partie B

On désigne par J l'intervalle $[0,7 ; 0,9]$.

1. Démontrer que si $x \in \text{J}$ alors $f(x) \in \text{J}$.
2. **a.** Prouver que, pour tout x de J, $|f'(x)| \leqslant 0,85$.
   b. En déduire que, pour tout x de J, $|f(x) - f(\alpha)| \leqslant 0,85|x - \alpha|$.
3. On définit la suite (u_n) de points de J par

$$u_0 = 0,9 \quad \text{et, pour tout } n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

   - **a.** Tracer (figure n° 2) la partie de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$ pour laquelle $x \in [0,5 ; 1,5]$ et la droite Δ d'équation $y = x$. (Unité graphique : 10 cm.)
   - **b.** En s'aidant du graphique et sans chercher à les calculer, représenter sur l'axe $\left(\text{O} ; \vec{\imath}\right)$ les termes u_0, u_1, u_2, u_3.
4. **a.** Prouver que, pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,85\,|u_n - \alpha|, \quad \text{puis que}$$

$$|u_n - \alpha| \leqslant 0,2 \times (0,85)^n.$$

   En déduire que la suite (u_n) converge vers α.
   Donner des valeurs approchées avec six décimales des termes u_n pour n entier variant de 1 à 10.

b. Déterminer un entier naturel n_0 tel que $\left|u_{n_0} - \alpha\right| \leqslant 10^{-6}$.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$h(x) = x\mathrm{e}^{x} - x - 1.$$

1. Démontrer que, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, les deux équations d'inconnue x

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad h(x) = 0$$

ont le même ensemble de solutions.
On a donc $h(\alpha) = 0$.

2. On note $\mathscr{H}$ la courbe de h, dans le repère $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

a. Calculer $h'(x)$ et prouver que $h'(x) > 0$ pour $x \in]0 ; +\infty[$.

b. Tracer (figure n° 3) la partie de la courbe $\mathscr{H}$ pour laquelle $x \in [0 ; 1]$. (Unité graphique : 10 cm.)
Placer la tangente à $\mathscr{H}$ au point d'abscisse 0,9.

3. Soit a un nombre réel de l'intervalle $]\alpha ; 0,9]$. Soit T la tangente à la courbe $\mathscr{H}$ au point M d'abscisse a.
On désigne par b l'abscisse du point d'intersection de T et de l'axe $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}\right)$.

a. Écrire une équation cartésienne de T.

b. Exprimer b en fonction de a.

4. On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x^2\mathrm{e}^{x} + 1}{\mathrm{e}^{x}(x+1) - 1}.$$

On rappelle qu'on a montré en C 2. a. que $\mathrm{e}^{x}(x+1) - 1 > 0$ pour $x > 0$.
(On vérifiera que $b = g(a)$, où a et b ont été définis à la question précédente.)
On définit la suite (v_n) de nombres réels en posant :

$$v_0 = 0,9 \quad \text{et, pour tout } n \geqslant 0, \quad v_{n+1} = g\left(v_n\right).$$

On admet que la suite (v_n) converge vers le nombre réel α.

a. En s'aidant de la figure n° 3, et sans chercher à les calculer, représenter sur l'axe $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}\right)$ les termes v_0, v_1 et v_2.

b. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4. On donnera pour chaque résultat une valeur décimale approchée par excès comportant six décimales.
On note $\overline{v_4}$ celle de v_4.

c. Déduire des signes des nombres $h\left(\overline{v_4}\right)$ et $h\left(\overline{v_4} - 10^{-6}\right)$ un encadrement de α à 10^{-6} près.
Comparer avec les résultats obtenus dans la partie B.