∽ Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1979 ∾

EXERCICE 1

Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$$

Placer, dans le plan complexe, les points images des solutions de (E) et démontrer que ces points sont situés sur un même cercle que l'on déterminera.

EXERCICE 2

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{l c l} f(x) & = & \dfrac{\text{Log}x - 2}{\text{Log}x - 1}\ \text{si}\ x \in]0\ ;\ \text{e}[\cup]\text{e}\ ;\ +\infty[\\ f(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

Log x désignant le logarithme népérien de x.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition D.
2. Étudier les variations de f. Tracer sa courbe représentative (C) dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (Unité conseillée : 2 cm),
3. Montrer que la restriction f_1 de f à $[0\,;\,\text{e}[$ est une bijection de $[0\,;\,\text{e}[$ sur $[l\ ;\ +\infty[$.
   Préciser les propriétés de la fonction réciproque h de f_1 (ensemble de définition, continuité, sens de variations), et tracer sa courbe représentative (C′) dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Montrer que h est dérivable au point 2 et calculer le nombre dérivé de h en ce point.

PROBLÈME

Selon l'habitude, pour tout endomorphisme ψ d'un espace vectoriel V, on pose

$$\psi^0 = \text{Id}_{\text{V}} \quad \text{et} \quad \psi^{n+1} = \psi \circ \psi^n$$

pour tout entier naturel n ; de même, si M est une matrice 2×2, on pose

$$M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{n+1} = M \times M^n$$

On désigne par V un plan vectoriel rapporté à une base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\imath}\right)$.

Partie A

On considère l'endomorphisme φ de V dont la matrice sur la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\imath}\right)$ est

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver un nombre réel a tel qu'il existe au moins un vecteur non nul $\vec{u}$ de V tel que $\varphi\left(\vec{u}\right) = a\vec{u}$.
   Déterminer l'ensemble E des vecteurs $\vec{v}$ de V tels que $\varphi\left(\vec{v}\right) = \vec{v}$.

2. **a.** Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = 2\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{\jmath}$ forment une base de V,

   b. Démontrer que, sur cette base, φ a pour matrice

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   c. Calculer B^2, puis B^n pour tout entier naturel n.

3. Soit ρ l'endomorphisme de V tel que

$$\rho\left(\overrightarrow{\imath}\right) = \overrightarrow{e_1} \quad \text{et} \quad \rho\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = \overrightarrow{e_2}$$

   et déterminer la matrice P de ρ sur la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\imath}\right)$ et calculer l'inverse ρ^{-1} de ρ.

   Vérifier que $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$, et en déduire que $\mathrm{A}^n = \mathrm{PB}^n\mathrm{P}^{-1}$ pour tout entier naturel n. Expliciter A^n en fonction de n.

4. Étant donné deux nombres réels u_0 et v_0, on définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations de récurrence

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_n & = & 3u_{n-1} - 4v_{n-1}, \\ v_n & = & u_n - v_{n-1}, \end{array}\right.$$

   et l'on pose $w_n = u_n\overrightarrow{\imath} + v_n\overrightarrow{\jmath}$, pour tout n.

   a. Exprimer w_n à l'aide de φ et de w_0, et en déduire une expression de u_n à l'aide de u_0, v_0 et n.

   b. Pour $(u_0,\ v_0) = (2,\ 2)$ déterminer la plus petite valeur de n telle que $|u_n|$ et $|v_n|$ soient tous deux strictement supérieurs à 10^6.

Partie B

On désigne par $\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions numériques définies et dérivables sur $\mathbb{R}$; on rappelle que la multiplication par un nombre réel et l'addition usuelles font de $\mathscr{D}$ un espace vectoriel. Étant donné un nombre réel k, on note $\mathscr{E}_k$ l'ensemble des fonctions f de $\mathscr{D}$ qui vérifient

$$f'(x) = f(x) - 2k\mathrm{e}^x$$

pour tout nombre réel x.

1. À tout élément f de $\mathscr{D}$, on associe la fonction g définie par $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{-x}$ pour tout réel x.

   a. Montrer que g appartient à $\mathscr{D}$.

   b. Démontrer que f appartient à $\mathscr{E}_k$ si, et seulement si, $g'(x) = -2k$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

   c. En déduire la forme générale des fonctions f de $\mathscr{E}_k$ et préciser en particulier l'ensemble $\mathscr{E}_0$ obtenu pour $k = 0$.

2. Trouver l'ensemble des couples $(F,\ G)$ d'éléments de $\mathscr{D}$ qui satisfont les relations

$$F'(x) = 3F(x) - 4G(x) \quad \text{et} \quad G(x) = F(x) - G(x).$$

   pour tout x de $\mathbb{R}$.

   (On pourra déterminer d'abord deux fonctions auxiliaires F_1 et G_1 liées à F et G par les relations $F = 2F_1$ et $G = F_1 + G_1$).