Baccalauréat C Amérique du Sud juin 1981

EXERCICE 1

On considère la suite réelle définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & 1 \\ 5u_{n+1} & = & u_n + 8 \quad \text{pour tout } n \geqslant 1. \end{array}\right.$$

On pose $v_n = u_n - 2$.
Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
En déduire u_n en fonction de n.
Étudier la variation et la convergence de la suite (u_n).

EXERCICE 2

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan affine $\mathscr{E}$, on donne les points $\text{A}\left(\dfrac{2}{3}~;~0\right)$ et $\text{B}(1~;~-1)$.
On considère l'application S de $\mathscr{E}$ dans lui-même qui, à tout point M associe M' ainsi défini : M_1 est l'image de M par la rotation de centre A et dont une mesure de l'angle est $\dfrac{\pi}{2}$, puis M' est l'image de M_1 par l'homothétie de centre B et de rapport 3.

1. $\mathscr{E}$ étant identifié au plan complexe, on note z l'affixe du point M, z_1 celle de M_1, z' celle de M'.
   Exprimer z' en fonction de z.
   Déterminer la nature de S et ses éléments caractéristiques.
2. Soit (P) la parabole dont une équation est $y^2 - \dfrac{8}{3}x = 0$.
3. Montrer que l'image de (P) par l'application S est une parabole (P$'$) dont on donnera l'équation.

PROBLÈME

Partie A

On considère l'ensemble $\mathscr{A}$ des matrices A_a de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel strictement positif.
Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}$ est un groupe commutatif pour la multiplication des matrices, isomorphe à $\left(\mathbb{R}_+^{\star},~\times\right)$.

Partie B

Soit E_2 un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Pour tout nombre réel strictement positif a, on considère l'application affine T_a dont l'endomorphisme associé a pour matrice A_a et qui associe au point O le point O$'$ de coordonnées $(0~;~\text{Log}\,a)$, où Log désigne la fonction logarithme népérien.

1. Si $M = T(m)$, déterminer les coordonnées $(X~;~Y)$ de M en fonction des coordonnées $(x~;~y)$ de m.
2. Déterminer $T_a \circ T_b$ (où b est lui-même un nombre réel strictement positif).
   En déduire que l'ensemble G des applications T_a muni de la composition des applications est un groupe commutatif.

Partie C

1. **a.** Soit g la fonction numérique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Étudier les variations de g.

b. On considère la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = g(x) - x.$$

Montrer que h est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que l'équation $h(x) = 0$ n'a qu'une racine réelle.

c. Tracer la courbe représentative C de la fonction g dans le plan euclidien E_2 rapporté au repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Déterminer la tangente à C en son centre de symétrie et la position de C par rapport à cette tangente.

2. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque $g^{-1} = f$, définie par $f(x) = \text{Log}\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$ où Log désigne le logarithme népérien.
Préciser le domaine de définition de f et tracer la courbe représentative Γ de la fonction f.

Partie D

Soit f_a la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f_a(x) = \text{Log}\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$$

où a est un réel strictement positif; on appelle Γ_a la courbe représentative de f_a dans le repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que l'image de Γ_1 par l'application T_a définie au B est la courbe Γ_a.
2. Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.
Montrer que Γ_a se déduit de Γ_b par une application du groupe G, qu'on précisera.

Partie E

Soit S_a l'application affine qui laisse le point O invariant et qui a le même endomorphisme associé que T_a.

1. Déterminer une équation de $S_a(\Gamma_1)$.
2. Étudier la fonction F_a de la variable réelle x définie par x + Jx2+ a21

$$F_a(x) = \text{Log}\left|\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right|$$

où a est un paramètre réel positif.

3. Tracer $S_a(\Gamma_1)$ pour $a = 2$ et $a = \dfrac{1}{2}$.
En déduire le tracé de Γ_2 et $\Gamma_{\frac{1}{2}}$.