**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1986

**EXERCICE 1** **4 points**

Dans le plan P, soit le triangle ABC rectangle en A et isocèle tel que AB = AC = $a$ où $a$ est un réel positif.
Soit $m$ un paramètre réel.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $m$ pour que le système de points pondérés $\{(\text{A},\ 2),\ (\text{B},\ -1),\ (\text{C},\ m)\}$ admette un barycentre $G_m$
2. Construire $G_0$ puis $G_2$. Vérifier que $\text{G}_0\text{G}_2 = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.
3. Déterminer les ensembles suivants :
   **a.** $\Gamma_1 = \left\{M \in \text{P}\ ;\ \left\|2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\|\right\}$.
   **b.** $\Gamma_2 = \left\{M \in \text{P}\ ;\ \left\|2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\|\right\}$
   **c.** $\Gamma_3 = \left\{M \in \text{P}\ ;\ 2M\text{A}^2 - M\text{B}^2 + 2M\text{A}^2 = a^2\right\}$.
   On utilisera le fait que $\Gamma_3$ passe par un point connu.
   On dessinera $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3$.

**EXERCICE 2** **4 points**

Soit $P$ le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
À $M(x\ ;\ y)$ on associe son affixe $z = x + \text{i}y$.
Soient les points A d'affixe $1 + \text{i}$ et B d'affixe $-3$.
À un point $M$ d'affixe $z (M \neq \text{A}$ et $M \neq \text{B})$, on associe le ou les points $M'$, s'ils existent, d'affixes $z'$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{z'+3}{z+3} & \text{imaginaire pur et}\\ \dfrac{z'-1-\text{i}}{z-1-\text{i}} & \text{réel}\end{array}\right.$$

1. Donner une signification géométrique de $\arg\dfrac{z'+3}{z+3}$ et de $\arg\dfrac{z'-1-\text{i}}{z-1-\text{i}}$.
2. Prouver géométriquement qu'il existe un cercle $C$ du plan tel que si $M \in P - C$, $M'$ existe et est unique. Construire alors $M'$ lorsque $M$ est donné.
3. Que se passe-t-il lorsque $\text{M} \in C - \{\text{A},\ \text{B}\}$ ?

**PROBLÈME** **12 points**

## Partie A

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, on se propose d'étudier la fonction numérique d'une variable réelle $x$ définie par

$$f_a(x) = \text{e}^{ax^2}.$$

On appellera $(\mathcal{C}_a)$ la courbe représentative de $f_a$ dans un repère orthonormal $\text{R} = \left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Donner les différents tableaux de variation de $f_a$ suivant les valeurs de $a$.
2. Tracer $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_{-1})$.
3. Soit $g_a$ la restriction de $f_a$ à $[0\,;\,+\infty[$.
   Montrer que $g_a$ est une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ sur un intervalle $I_a$ que l'on précisera.
   Déterminer $g_a^{-1}$.
   Discuter suivant les valeurs de $a$.
   Tracer sur la figure la courbe représentative de $g_1^{-1}$ et celle de $g_{-1}^{-1}$.
4. Justifier les inégalités :

$$2x-1 \leqslant x^2 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et}$$

$$x^2 \leqslant 3x-2 \quad \text{pour tout } x \in [1\,;\,2].$$

   **a.** En déduire un encadrement de l'aire comprise entre $(\mathscr{C}_{-1})$, $x'x$, et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$.

   **b.** Soit $I$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$I(x) = \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   Montrer que $I$ a une limite finie quand $x$ tend vers $+\infty$ dont on donnera une majoration.

**Partie B**

On se propose de rechercher les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$g(x+y)\times g(x-y) = (g(x)\times g(y))^2 \qquad (1)$$

1. **a.** Montrer que $f_a$ vérifie (1).

   **b.** Montrer que $g(0)$ ne peut prendre que 3 valeurs.

   **c.** Si $g(0)=0$, prouver que $g$ est l'application nulle.

   **d.** S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $g(x_0)=0$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)=0$.
   En déduire que $g$ est la fonction nulle.

   **e.** Si $g$ vérifie (1) et si $g$ n'est pas la fonction nulle, montrer que :
   soit $g(x)>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $g(x)<0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $g$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant (1) et telle que $g(x)>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\ln[g(x)]$.

   **a.** Montrer que $h(0)=0$.

   **b.** Vérifier que :

$$h(x+y)+h(x-y) = 2(h(x)+h(y)) \text{ pour tout } (x,\ y) \in \mathbb{R}^2.$$

   **c.** Montrer que $h$ est une fonction paire.
   En déduire que $g$ est aussi une fonction paire.

   **d.** Soit $a=h(1)$.
   Déterminer $h(2)$, $h(3)$ et prouver par récurrence que :

$$h(n) = an^2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

**e.** Prouver que $h(nx) = n^2 h(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

En déduire $h\left(\dfrac{1}{p}\right)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ puis $h\left(\dfrac{n}{p}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$.

En déduire que $h(x) = ax^2$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

**f.** En admettant que tout nombre réel est la limite d'une suite de nombres rationnels, montrer que $h(x) = ax^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire l'expression de toutes les fonctions $g$ strictement positives, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant (1).