

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1986 ∞

EXERCICE 1

4 points

Dans le plan P , soit le triangle ABC rectangle en A et isocèle tel que $AB = AC = a$ où a est un réel positif.

Soit m un paramètre réel.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que le système de points pondérés $\{(A, 2), (B, -1), (C, m)\}$ admette un barycentre G_m

2. Construire G_0 puis G_2 . Vérifier que $G_0G_2 = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

3. Déterminer les ensembles suivants :

a. $\Gamma_1 = \left\{ M \in P ; \left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| \right\}$.

b. $\Gamma_2 = \left\{ M \in P ; \left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = 2 \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| \right\}$

c. $\Gamma_3 = \{M \in P ; 2MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = a^2\}$.

On utilisera le fait que Γ_3 passe par un point connu.

On dessinera $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

EXERCICE 2

4 points

Soit P le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

À $M(x; y)$ on associe son affixe $z = x + iy$.

Soient les points A d'affixe $1 + i$ et B d'affixe -3 .

À un point M d'affixe z ($M \neq A$ et $M \neq B$), on associe le ou les points M' , s'ils existent, d'affixes z' tels que :

$$\begin{cases} \frac{z'+3}{z+3} & \text{imaginaire pur et} \\ \frac{z'-1-i}{z-1-i} & \text{réel} \end{cases}$$

1. Donner une signification géométrique de $\arg \frac{z'+3}{z+3}$ et de $\arg \frac{z'-1-i}{z-1-i}$.

2. Prouver géométriquement qu'il existe un cercle C du plan tel que si $M \in P - C$, M' existe et est unique. Construire alors M' lorsque M est donné.

3. Que se passe-t-il lorsque $M \in C - \{A, B\}$?

PROBLÈME

12 points

Partie A

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, on se propose d'étudier la fonction numérique d'une variable réelle x définie par

$$f_a(x) = e^{ax^2}.$$

On appellera (\mathcal{C}_a) la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormal $R = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Donner les différents tableaux de variation de f_a suivant les valeurs de a .
2. Tracer (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_{-1}) .
3. Soit g_a la restriction de f_a à $[0; +\infty[$.
Montrer que g_a est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle I_a que l'on précisera.
Déterminer g_a^{-1} .
Discuter suivant les valeurs de a .
Tracer sur la figure la courbe représentative de g_1^{-1} et celle de g_{-1}^{-1} .
4. Justifier les inégalités :

$$2x - 1 \leq x^2 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et}$$

$$x^2 \leq 3x - 2 \quad \text{pour tout } x \in [1; 2].$$

- a. En déduire un encadrement de l'aire comprise entre (\mathcal{C}_{-1}) , $x'x$, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.
- b. Soit I la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$I(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt.$$

Montrer que I a une limite finie quand x tend vers $+\infty$ dont on donnera une majoration.

Partie B

On se propose de rechercher les fonctions continues sur \mathbb{R} telles que :

$$g(x+y) \times g(x-y) = (g(x) \times g(y))^2 \quad (1)$$

1. a. Montrer que f_a vérifie (1).
- b. Montrer que $g(0)$ ne peut prendre que 3 valeurs.
- c. Si $g(0) = 0$, prouver que g est l'application nulle.
- d. S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $g(x_0) = 0$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $g\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 0$.
En déduire que g est la fonction nulle.
- e. Si g vérifie (1) et si g n'est pas la fonction nulle, montrer que :
soit $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $g(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Soit g une fonction continue sur \mathbb{R} vérifiant (1) et telle que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \ln[g(x)]$.

a. Montrer que $h(0) = 0$.

b. Vérifier que :

$$h(x+y) + h(x-y) = 2(h(x) + h(y)) \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

c. Montrer que h est une fonction paire.

En déduire que g est aussi une fonction paire.

d. Soit $a = h(1)$.

Déterminer $h(2)$, $h(3)$ et prouver par récurrence que :

$$h(n) = an^2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

e. Prouver que $h(nx) = n^2 h(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

En déduire $h\left(\frac{1}{p}\right)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ puis $h\left(\frac{n}{p}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$.

En déduire que $h(x) = ax^2$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

f. En admettant que tout nombre réel est la limite d'une suite de nombres rationnels, montrer que $h(x) = ax^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire l'expression de toutes les fonctions g strictement positives, continues sur \mathbb{R} , vérifiant (1).