

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1987 ∞

EXERCICE 1

4 points

Le plan P est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Pour tout réels  $x$  et  $y$ ,  $z = x + iy$  est l'affixe du point M de coordonnées  $(x; y)$ , c'est aussi celle du vecteur  $\vec{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ .

A est le point d'affixe  $2i$ , D la droite d'équation  $y = 0$ .

$f$  est la fonction complexe de la variable complexe  $z$  qui à  $z$  non réel associe :

$$z' = \frac{z - 2i}{z - \bar{z}}.$$

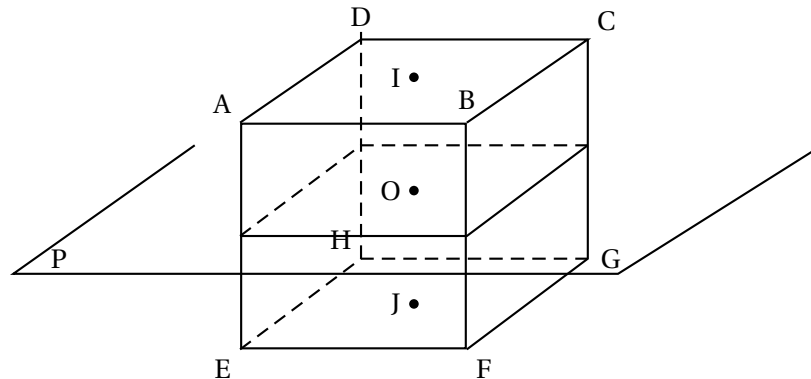
$F$  associe à tout point M de  $P - \{D\}$  d'affixe  $z$ , le point M' d'affixe  $z'$ .

1. Exprimer les parties réelle et imaginaire de  $z'$  en fonction de celles de  $z$  et déduire que  $f$  définit une bijection de  $\mathbb{C} - \{\mathbb{R}\}$  sur une partie de  $\mathbb{C}$  à déterminer.
2. B est le point d'affixe  $\frac{1}{2}$ . Quelles sont les images respectives par  $F$  des demi-droites ouvertes d'origine O portées par l'axe imaginaire, l'axe imaginaire étant l'ensemble des points d'abscisse nulle.
3. Quelle est l'affixe du projeté orthogonal H sur D du point M d'affixe  $z$ ?  
Quelle est celle de  $\vec{HM}$ ?

Montrer que l'ensemble des points d'affixe  $z$  tels que  $|f(z)| = \frac{1}{2}$  est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

EXERCICE 2

6 points



A, B, C, D, E, F, G, H sont les sommets d'un cube tel que ABCD soit une face horizontale, EFGH l'autre, et que la translation de vecteur vertical  $\vec{AE}$  transforme B en F, C en G et D en H.

$P$  désigne la plan horizontal passant par le centre  $O$  du cube,  $(ABC)$  celui passant par  $A$ ,  $B$  et  $C$ ,  $s_P$  la réflexion (ou symétrie orthogonale) par rapport à  $P$ .

$I$  et  $J$  sont les centres respectifs des carrés  $ABCD$  et  $EFGH$ .

Il s'agit de déterminer les rotations de l'espace qui transforment tout sommet de l'une des faces horizontales en un sommet de l'autre.

1. **a.** On suppose que  $s$  est une réflexion transformant  $\{A, B, C, D\}$  en  $\{E, F, G, H\}$ .  
Déterminer  $s(I)$  et  $s(J)$ .
- b.** Dédurre qu'il existe une seule réflexion transformant  $\{A, B, C, D\}$  en  $\{E, F, G, H\}$ .
2. Pour toute rotation  $r$  échangeant  $\{A, B, C, D\}$  en  $\{E, F, G, H\}$ , déterminer  $r(I)$ ,  $r(J)$  et  $r(O)$ .  
Dédurre que l'axe de  $r$  passe par  $O$ , qu'il est horizontal et que  $r$  est un demi-tour.
3. Soit  $r$  un demi-tour d'axe horizontal  $L$  passant par  $O$ .
  - a.** Déterminer  $r \circ s_P(I)$  et  $r \circ s_P(M)$  pour tout point  $M$  de  $L$ .  
Dédurre que  $r \circ s_P$  est la réflexion  $s_Q$  par rapport au plan vertical contenant  $L$ .
  - b.** On note  $\Delta$  la droite intersection des plans  $Q$  et  $(ABC)$ .  
Montrer que  $(ABC)$  est stable par  $s_Q$ . Quelle est la restriction de  $s_Q$  à ce plan  $(ABC)$  ?
  - c.** Montrer que  $r$  est solution si et seulement si la symétrie orthogonale  $s_\Delta$  par rapport à  $\Delta$ , isométrie du plan  $(ABC)$ , laisse invariant l'ensemble  $\{A, B, C, D\}$ .
4. Dédurre les quatre demi-tours solutions.

**PROBLÈME****10 points**

I. Pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ , on note  $f_n$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\begin{cases} \text{si } n = 0 & f_0(x) = e^{1-x}, \\ \text{si } n \in \mathbb{N}^* & f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{1-x}. \end{cases}$$

On désigne par  $(\mathcal{C}_n)$  la courbe représentative de  $f_n$  dans un repère orthonormé.

1. Étudier  $f_0$ . Tracer  $(\mathcal{C}_0)$  en précisant la droite asymptote quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et les tangentes à  $(\mathcal{C}_0)$  aux points d'abscisses 0 et 1.
2. On se propose d'étudier  $f_n$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.
  - a.** Étudier les variations de  $f_n$  (on distinguera plusieurs cas).
  - b.** Montrer que  $(\mathcal{C}_n)$  admet une droite asymptote quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
3. **a.** Étudier les positions relatives de  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$ . Tracer  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$  dans un même repère. L'étude des branches infinies en  $-\infty$  n'est pas demandée.
  - b.** Calculer l'aire de la partie du plan limitée par  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 2$ .  
(On pourra remarquer une relation simple entre  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_2'$ .)

II. Soit  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$  et  $\alpha$  un réel strictement positif fixé.  
On considère l'intégrale  $I_n$  définie par :

$$I_n = \int_0^\alpha f_n(t) dt.$$

1. a. Calculer  $I_0$ .

b. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{\alpha^n}{n!} I_0$ .

c. On admettra que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0$ .

En déduire la limite de  $I_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2. a. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = I_n - \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} e^{1-\alpha}$ .

b. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = e - \left( \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} \right) e^{1-\alpha}.$$

et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} = e^\alpha.$$

c. En déduire la limite de  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .