Durée : 4 heures

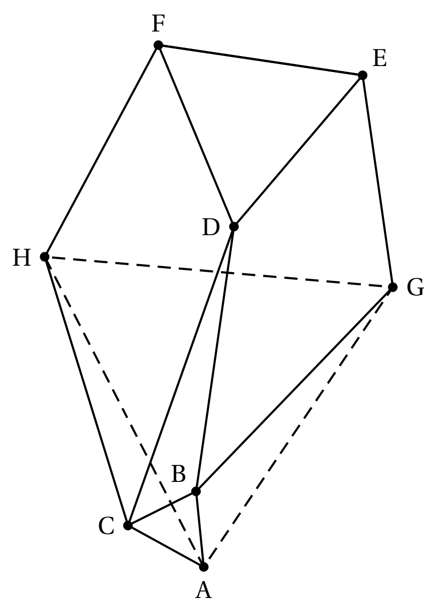
∽ Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1992 ∽

EXERCICE 1 **5 points**

Dans le plan orienté, on considère la figure ci-contre : ABC et DEF sont deux triangles équilatéraux directs et

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{DE}}, \overrightarrow{\mathrm{DF}}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

On note G et H les points tels que EDBG et CDFH soient des parallélogrammes.
Le but de l'exercice est de démontrer de deux manières (l'une utilisant les affixes complexes, l'autre utilisant des composées de déplacements) que le triangle AGH est équilatéral.



I Le plan orienté étant rapporté à un repère orthonormal direct, on note a, b, c, d, e, f, g, h les affixes respectives des points A, B, C, D, E, F, G, H.

1. Montrer que :

$$c - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b - a).$$

2. Exprimer $(f - d)$ en fonction de $(e - d)$.
3. Exprimer g en fonction de b, d, e et h en fonction de c, d, f.
4. Démontrer que :

$$h - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(g - a).$$

En déduire que le triangle AGH est équilatéral.

II. On note :
t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$,
t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$,
R la rotation de centre D et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.
On pose $T = t_2 \circ R \circ t_1$.

1. Justifier que T est une rotation et préciser son angle.
   Déterminer l'image de B par T et en déduire le centre de la rotation T.
2. Déterminer l'image de G par T et montrer que le triangle AGH est équilatéral.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs, telle que $u_0 = 5$ et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$.
2. On se propose, dans cette question, d'étudier de deux manières la convergence de cette suite.

   A. Première méthode

   a. Montrer que la suite est décroissante.

   b. Déduire de ce qui précède que la suite est convergente, puis trouver sa limite.

   B. Deuxième méthode

   a. Montrer que, pour tout entier naturel n,

   $$u_{n+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4}\left(u_n - 4\right).$$

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n,

   $$0 \leqslant u_n - 4 \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

   c. En déduire que la suite converge et trouver sa limite.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(x) = -\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.
On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan orienté P rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$ [unité graphique : 2 cm].

1. **a.** Justifier la dérivabilité de f sur $]0~;~+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x de cet intervalle. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

   b. Préciser le sens de variation de f sur $[0~;~+\infty[$.
   Étudier la limite de f en $+\infty$.
   Dresser le tableau de variation de f.
2. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A d'abscisse 1.
3. Soit φ la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $\varphi(t) = \mathrm{e}t - \mathrm{e}^t$ et g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

   $$g(x) = -\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{\mathrm{e}}{2}.$$

   a. Étudier les variations de φ sur $]0~;~+\infty[$.

b. Si g' est la fonction dérivée de g, montrer que, pour x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{\varphi\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}.$$

c. Déduire des questions précédentes le sens de variation de g et le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
Étudier alors la position de la courbe (C) par rapport à sa tangente (T) au point A.

4. Construire dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ la droite (T), la tangente à (C) au point d'abscisse 0 et la courbe (C).

5. On note $(\mathcal{D})$ la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des ordonnées et la droite (Δ) d'équation $y = -\text{e}$.
Si $\mathcal{A}$ désigne, en unités d'aire, l'aire du domaine $(\mathcal{D})$ justifier que :

$$\mathcal{A} = \text{e} + \int_0^1 f(x)\,\text{d}x.$$

Partie B

Soit r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Si M est un point du plan P d'affixe $z = x + \text{i}y$ et M' son image par r d'affixe $z' = x' + \text{i}y'$, exprimer z' en fonction de z et en déduire x' et y' en fonction de x et y.

2. Soit (C') l'image de (C) par la rotation r. Montrer que (C') est la courbe représentative de la fonction F définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = (\ln x)^2$.

3. On admet que l'image de $(\mathcal{D})$ par la rotation r est la partie $(\mathcal{D}')$ du plan comprise entre (C') et les images par r de la droite (Δ) et de l'axe des ordonnées.

a. Étudier les variations de F et la limite de F en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de F.

b. Construire sur le même graphique que la courbe (C), la droite (T$'$) image de (T) par r et la courbe (C').

c. À l'aide de deux intégrations par parties, calculer, en unités d'aire, l'aire de $(\mathcal{D}')$. En déduire alors :

$$I = \int_0^1 \text{e}^{\sqrt{t}}\,\text{d}t.$$

Partie C

On se propose dans cette question de calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \text{e}^{\sqrt{t}}\,\text{d}t$ d'une autre manière.

On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$h(x) = \int_0^x \text{e}^{\sqrt{t}}\,\text{d}t$$

et k la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $k(x) = x^2$.
On note Ψ la fonction $(h \circ k)$ définie sur R^+.

1. **a.** Calculer $\Psi(0)$.

b. Justifier la dérivabilité de Ψ sur $\mathbb{R}^+$ et montrer, pour tout x réel, que $\Psi(x) = 2x\text{e}^x$.

c. En déduire, pour x réel que $\Psi'(x) = 2(x-1)\text{e}^x + 2$.

2. Calculer alors :

$$I = \int_0^1 \text{e}^{\sqrt{t}}\,\text{d}t.$$