Durée : 4 heures

Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1984

EXERCICE 1 **points**

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \ln\left(1 + \mathrm{e}^{x}\right).$$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan affine euclidien P muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Démontrer que : $\dfrac{X}{X+1} - \ln(1+X) < 0$ pour tout $X > 0$.
   En déduire le sens de variation de f.
2. Étudier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le plan P.

EXERCICE 2 **points**

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} u_0 & = & 0\\ u_{n+1} & = & \sqrt{3u_n + 4}\end{array}\right.$$

1. **a.** Montrer que (u_n) est majorée par 4.
   b. Montrer que (u_n) est strictement croissante.
   c. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, on a : 1

$$4 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(4 - u_n).$$

   b. Retrouver le résultat de 1. c.
   c. Étudier la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = n^2(4 - u_n).$$

PROBLÈME **points**

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé R = $\left(\mathrm{O},\,\overrightarrow{e_1},\,\overrightarrow{e_1}\right)$.
On note $\mathrm{P}^{\star}$, P privé du point O, et on considère l'application f de $\mathrm{P}^{\star}$ dans P qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Partie A

1. Montrer que f admet deux points invariants.
   On appellera A le point invariant dont la partie réelle de l'affixe est positive, B l'autre.

2. Soit k un nombre réel non nul. On considère l'application g_k de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g_k(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Étudier, suivant les valeurs de k, les variations de g_k et donner les différents tableaux de variation.

3. En déduire l'image par f de :
$\Delta^\star$, la droite $\left(\text{O}, \overrightarrow{e_1}\right)$ privée du point O,
et de $\text{D}^\star$, la droite $\left(\text{O}, \overrightarrow{e_2}\right)$ privée du point O.

4. Donner l'expression analytique de f relativement au repère R.

Partie B

Soit α un nombre réel non nul, on note Δ_α la droite d'équation $y = \alpha x$ et $\Delta_\alpha^\star$ la droite Δ_α privée du point O.

1. Soit H_α la courbe d'équation : 2 y2

$$x^2 - \frac{y^2}{\alpha^2} = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Déterminer la nature de H_α et préciser ses éléments remarquables : centre, axes, sommets, asymptotes, foyers.

2. **a.** Montrer qu'il existe un nombre réel k non nul tel que, quel que soit le point M de $\Delta_\alpha^\star$ d'abscisse x dans le repère R, les coordonnées $(x'~;~y')$ de l'image M' de M par f vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & g_k(x)\\ y' & = & \alpha g_{-k}(x). \end{array}\right.$$

b. En déduire que l'image de $\Delta_\alpha^\star$ par f est incluse dans H_α, puis montrer que l'image de $\Delta_\alpha^\star$ par f est H_α. (On pourra utiliser le A 2.)

c. Montrer qu'il existe un réel α' non nul différent de α tel que l'image par f de la droite $\Delta_{\alpha'}^\star$ où $\Delta_{\alpha'}^\star$ est la droite $\Delta_{\alpha'}$ d'équation $y = \alpha' x$ privée du point O, est H_α.

3. Tracer H_α, Δ_α, $\Delta_{\alpha'}$ pour $\alpha = 1$.
Soit r, un nombre réel strictement positif. On note C_r le cercle de centre O et de rayon r.
Quelle est l'image par f de C_1 ?
On suppose $r \neq 1$.

a. Montrer que l'image de C_r par f est une ellipse E_r dont on déterminera une équation cartésienne et les éléments remarquables. On vérifiera, en particulier, que ses foyers, indépendants de r, sont les points A et B.

b. Montrer qu'il existe un autre cercle $C_{r'}$ de centre O et de rayon r' dont l'image par f est E_r.

c. Tracer E_r, C_r, $C_{r'}$ pour $r = 2$.

4. Soit M un point de E_r $(r \neq 1)$. On note T la tangente en M à E_r, M_1 le symétrique de A par rapport à T et M_2 le projeté orthogonal de A sur T. Trouver l'ensemble des points M_1 quand M décrit E_r.
En déduire l'ensemble des points M_2 quand M décrit E_r.