Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2002

EXERCICE 1 **5 points**

1. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x+1) - \ln(x).$$

Montrer que, pour tout $x > 0$: $g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

Étudier le signe de $g(x)$.

Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

Démontrer que la fonction G, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$G(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln(x),$$

est une primitive de g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x + 2 + \ln(x+1) - \ln(x),$$

et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan (unité graphique : 1 cm). On ne demande pas de tracer $(\mathscr{C})$.

En utilisant les résultats du **1.**, justifier les affirmations suivantes :

a. l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$;

b. la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$;

c. la courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessus de la droite (D).

3. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \left[f(x) - (x+2)\right]\,\mathrm{d}x$.

Quelle interprétation géométrique peut-on faire de cette intégrale ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Pour compléter le financement d'un voyage scolaire, une association de parents d'élèves décide d'organiser une loterie. Pour cela, il faut une roue partagée en quatre secteurs de même dimension (voir figure ci-dessous) et deux urnes A et B.

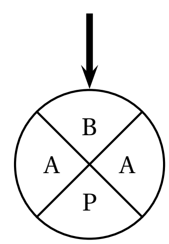
L'urne A contient une boule jaune et trois boules noires et l'urne B contient trois boules jaunes et une boule noire.

Le jeu se déroule de la manière suivante : le candidat fait tourner la roue qui, étant lancée, s'arrête de façon aléatoire, la flèche ne pouvant indiquer qu'un seul secteur (tous les secteurs ont donc la même chance de « sortir »).

— si le candidat obtient la lettre P, il a perdu et le jeu est fini ;

— s'il obtient la lettre A, il tire une boule dans l'urne A ;

— s'il obtient la lettre B, il tire une boule dans l'urne B



On note P, A, B, J et N les évènements suivants :

P : « à l'issue du lancer de la roue, on a obtenu la lettre P » ;

A : « à l'issue du lancer de la roue, on a obtenu la lettre A » ;

B : « à l'issue du lancer de la roue, on a obtenu la lettre B » ;

J : « on a tiré une boule jaune » ;

N : « on a tiré une boule noire ».

Dans cet exercice les probabilités seront donnée sous forme de fractions irréductibles.

1. Donner la probabilité des évènements A, B et P.
2. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
3. **a.** Sachant que lors du lancer de la roue on a obtenu la lettre A, quelle est la probabilité de tirer une boule jaune ?

   b. En déduire la probabilité de l'évènement $A \cap J$.
4. Un joueur fait une partie.

   Quelle est la probabilité qu'à l'issue du lancer de la roue il obtienne la lettre B et qu'il tire une boule jaune ?

   Déduire des questions précédentes que la probabilité que le joueur tire une boule jaune est $\dfrac{5}{16}$.
5. Un joueur fait deux parties consécutivement, les deux parties étant indépendantes l'une de l'autre. Quelle est la probabilité que ce joueur tire exactement deux boules jaunes ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

On dispose d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée et de deux urnes, l'une marquée de la lettre F et l'autre marquée de la lettre P.

1. Chacune des deux urnes contient 6 boules. L'urne marquée F contient 5 boules blanches et 1 boule noire alors que l'urne marquée P contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

   On lance la pièce de monnaie :

   — si on obtient « face », on tire une boule dans l'urne marquée F.

   — si on obtient « pile », on tire une boule dans l'urne marquée P.

   On note P, F, B et N les évènements suivants :

   P : « on a obtenu pile au lancer de la pièce » ;

   F : « on a obtenu face au lancer de la pièce » ;

   B : « on a tiré une boule blanche » ;

   N : « on a tiré une boule noire ».

   Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche sachant qu'on a obtenu « face » au lancer de la pièce.

   En déduire la probabilité d'obtenir « face » au lancer de la pièce et de tirer une boule blanche.

   Calculer la probabilité de l'évènement $B \cap P$.

   Déduire des questions précédentes que la probabilité de tirer une boule blanche est $\dfrac{7}{12}$.
2. On effectue la même expérience aléatoire, les deux urnes contenant à présent $2n$ boules, n étant un entier naturel non nul. L'urne marquée P contient $(2n-1)$ boules blanches et 1 boule noire alors que l'urne marquée P contient $(n-1)$ boules blanches et $(n+1)$ boules noires.

   Montrer que la probabilité de tirer une boule blanche est : $\dfrac{3n-2}{4n}$.
3. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \dfrac{3n-2}{4n}$ pour tout n entier naturel non nul.

   a. Déterminer la limite, quand n tend vers plus l'infini, de la suite (u_n).

   b. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{4n(n+1)}$.

   Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (u_n).

PROBLÈME **10 points**

Un négociant en vins a fait mener une étude visant à déterminer à quel prix maximal ses clients sont prêts à acheter une bouteille de vin. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Prix maximal x_i en euros de la bouteille	5	10	15	20	25	30
Pourcentage y_i d'acheteurs potentiels	84	58	30	19	7	4

On voit dans ce tableau, par exemple, que 58 % des clients de ce négociant sont prêts à payer 10 euros une bouteille de vin.

Partie A (Ajustement affine)

1. **a.** Représenter le nuage de points correspondant à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal du plan (unités : 1 cm pour 2 euros sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 5 % sur l'axe des ordonnées).

   b. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.

2. **a.** Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur arrondie à 10^{-2} près du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$. Un ajustement affine est-il judicieux ?

   b. Donner une équation de la droite de régression de y en x, par la méthode des moindres carrés, les coefficients étant calculés à l'aide de la calculatrice et arrondis à 10^{-2} près.

   Représenter la droite sur la figure du **1.**, en précisant les coordonnées de deux points de cette droite.

3. Chez ce négociant, le prix moyen d'une bouteille est de 13 euros. En utilisant l'ajustement précédent, calculer le pourcentage des clients prêts à acheter une bouteille à ce prix. On arrondira le résultat à l'entier le plus proche.

Partie B (Autre ajustement)

On envisage un ajustement du nuage de points de la **partie A** par la courbe représentative d'une fonction. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \left(x^2 + 20x + 100\right) \mathrm{e}^{-0,2x}$$

et $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère de la **partie A**.

1. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + 20x + 100\right) \mathrm{e}^{-0,2x} = 0$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

2. **a.** f' étant la dérivée de la fonction f, montrer que pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$:

   $$f'(x) = \left(-0,2x^2 - 2x\right) \mathrm{e}^{-0,2x}.$$

   b. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x \in [0\ ;\ +\infty[$.

   c. En déduire les variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. **a.** Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera les valeurs arrondies à 10^{-1} près)

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$		82,8					

   b. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère de la **partie A**.

4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 50$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[10 ; 15]$.

   b. Donner, en justifiant la réponse, un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

   c. Que représente α pour le négociant, si on admet que la fonction f représente un bon ajustement du nuage de points ?