∽ Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2007 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

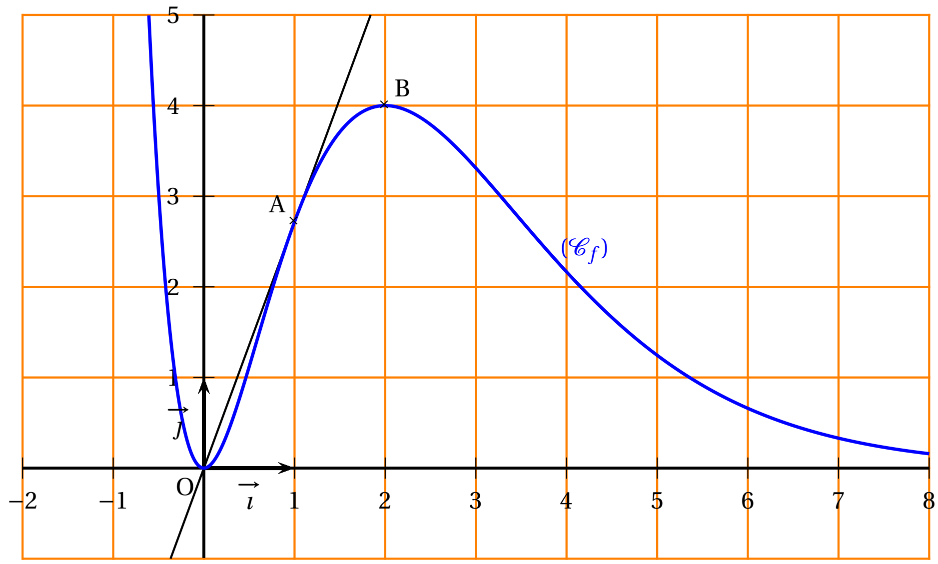
On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La figure ci-dessous montre une partie de sa courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On dispose des renseignements suivants sur la fonction f et la courbe $(\mathscr{C}_f)$:

- la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$, elle est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$;
- la courbe $(\mathscr{C}_f)$ passe par l'origine du repère et par les points A$(1 ; \text{e})$ et B$(2 ; 4)$;
- la droite (OA) est tangente en A à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$.

On note f' la fonction dérivée de f et on appelle F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.



Pour chacune des affirmations suivantes, en utilisant les informations données par l'énoncé, cocher la cas V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse) sur l'annexe 1 *à rendre avec votre copie. Il n'est pas demandé de justifier les réponses. Une réponse exacte rapporte* 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse n'enlève aucun point et n'en rapporte aucun. Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est* 0.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
2. L'équation $f(x) = 0,1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
3. $f'(1) = f(1)$.
4. $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\text{d}x < 5$.
5. $\displaystyle\int_1^3 f'(x)\,\text{d}x < 1$.
6. La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.
7. $F(5) > F(6)$.
8. La fonction f' est croissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidat n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

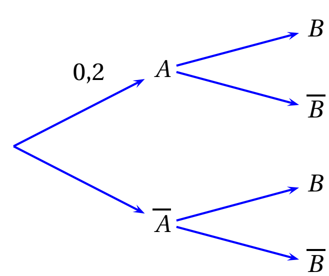
Une revue professionnelle est proposée en deux versions : une édition papier et une édition électronique consultable via internet. Il est possible de s'abonner à une seule des deux éditions ou de s'abonner à l'édition papier et à l'édition électronique.
L'éditeur de la revue a chargé un centre d'appel de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels.
On admet que lorsqu'un lecteur potentiel est contacté par un employé du centre d'appel, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition papier est égale à $0,2$; s'il s'abonne à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à l'édition électronique est égale à $0,4$; s'il ne s'abonne pas à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition électronique est égale à $0,1$.

Partie I

Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par un employé du centre d'appel.
On note :

- A l'évènement « la personne s'abonne à l'édition papier »,
- B l'évènement « la personne s'abonne à l'édition électronique »,
- $\overline{A}$ l'évènement contraire de A, $\overline{B}$ l'évènement contraire de B.

1. a. Reproduire et compléter l'arbre suivant :



b. Donner la probabilité de $\overline{B}$ sachant A et la probabilité de $\overline{B}$ sachant $\overline{A}$.

2. a. Calculer la probabilité que la personne contactée s'abonne à l'édition papier et à l'édition électronique.

b. Justifier que la probabilité de l'évènement B est égale à $0,16$.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

3. On suppose que la personne contactée s'est abonnée à l'édition électronique. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit aussi abonnée à l'édition papier ?

Partie II

Pour chacune des personnes contactée, le centre d'appel reçoit de l'éditeur de la revue

- 2 € si la personne ne s'abonne à aucune des deux éditions ;
- 10 € si la personne s'abonne uniquement à l'édition électronique ;
- 15 € si la personne s'abonne uniquement à l'édition papier ;
- 20 € si la personne s'abonne aux deux éditions.

1. Reproduire et compléter, sans donner de justification, le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la somme reçue par le centre d'appel pour une personne contactée.

Somme reçue en €	2	10	15	20
Probabilité				

2. Proposer, en expliquant votre démarche, une estimation de la somme que le centre d'appel recevra de l'éditeur s'il parvient à contacter 5 000 lecteurs potentiels.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidat ayant choisi l'enseignement de spécialité

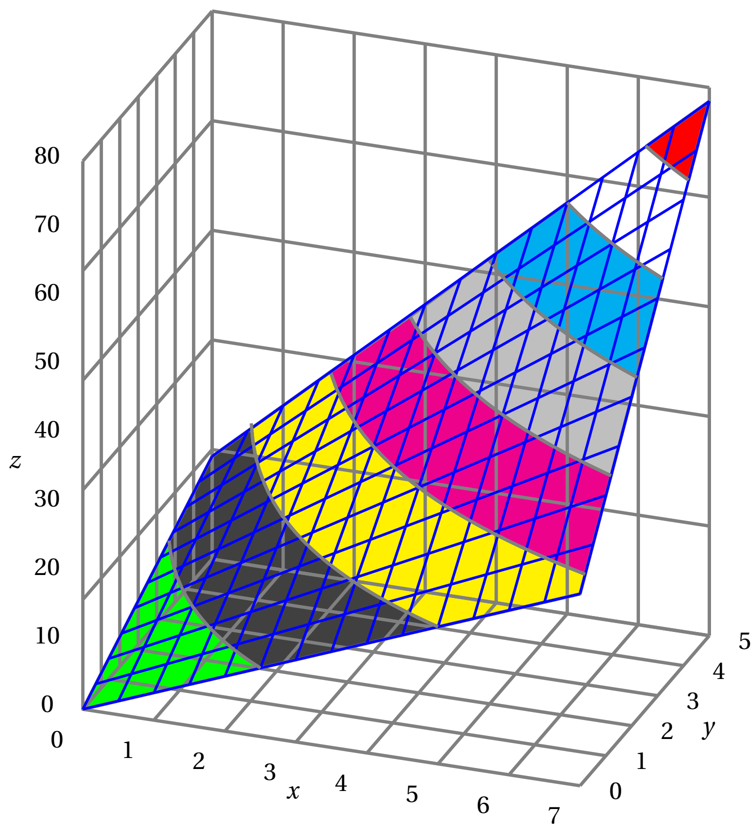
On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,7]$ et tout réel y de l'intervalle $[0\,;\,5]$ par :

$$f(x\,;\,y) = 4x + 3y + xy.$$

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

On appelle $\mathscr{S}$ la surface représentant la fonction f dans un repère orthogonal de l'espace.
La figure ci-après, à rendre avec la copie, donne une vue de la surface $\mathscr{S}$.



1. A est le point de $\mathscr{S}$ d'abscisse 3 et d'ordonnée 4, B est le point de $\mathscr{S}$ d'ordonnée 2 et de cote 40.

a. Placer les points A et B sur la figure.

b. Déterminer la valeur exacte de la cote du point A et la valeur exacte de l'abscisse du point B.

2. On appelle $\mathscr{L}$ l'intersection de la surface $\mathscr{S}$ et du plan d'équation $y = 4$.
Déterminer la nature de l'ensemble $\mathscr{L}$ et surligner en couleur cet ensemble sur la figure.

Partie B

Les activités d'une grosse entreprise sont réparties entre deux secteurs : le secteur P (production) et le secteur C (commercialisation).
Cette entreprise envisage d'investir au cours de l'année 2008 jusqu'à 7 millions d'euros dans le secteur P et jusqu'à 5 millions d'euros dans le secteur C.
Le service chargé d'évaluer l'effet de ces investissements sur le chiffre d'affaire 2009 de l'entreprise, propose le modèle suivant :
Pour $0 \leqslant x \leqslant 7$ et $0 \leqslant y \leqslant 5$, si l'entreprise investit au cours de l'année 2008, x millions d'euros dans le secteur P et y millions d'euros dans le secteur C, cela entraînera en 2009 une hausse du chiffre d'affaire égale à $f(x\,;\,y)$ millions d'euros.

1. Déterminer la hausse du chiffre d'affaire 2009 prévue par ce modèle dans chacun des cas suivants :

a. $x = 3$ et $y = 5$,

b. $x = 7$ et $y = 1$.

2. On suppose que l'entreprise décide de fixer à 8 millions d'euros le montant total des investissements prévus au cours de l'année 2008.

a. Montrer que, sous cette contrainte, on peut exprimer $f(x\,;\,y)$ en fonction de x seulement. On note $g(x)$ l'expression ainsi obtenue. Vérifier que :

$$g(x) = -x^2 + 9x + 24.$$

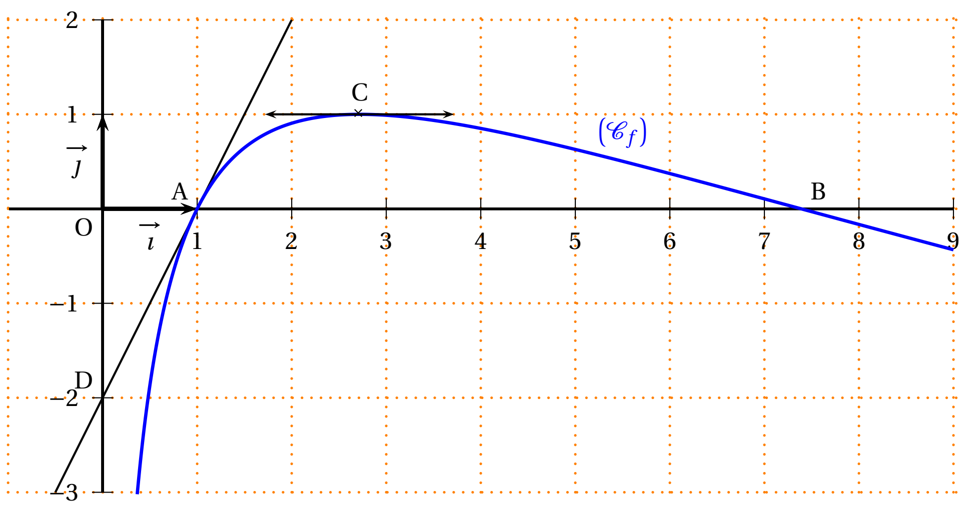
b. Selon le modèle proposé, comment faudra-t-il répartir entre les secteurs P et C les 8 millions euros à investir au cours de l'année 2008 pour obtenir une hausse maximale du chiffre d'affaire de l'année 2009 ?

EXERCICE 4 **6 points**

On admettra que les fonctions considérées dans cet exercice sont dérivables sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = (2 - \ln x)\ln x.$$

La figure ci-dessous donne la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
La courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en A$(1\,;\,0)$ et en B.
La tangente en C à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente en A à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des ordonnées en D.



1. Déterminer l'abscisse du point B (la valeur exacte est demandée).
2. Calculer la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
3. On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x}$$
   b. Déterminer les coordonnées du point C et l'ordonnée du point D (les valeurs exactes sont demandées).
4. **a.** Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par
   $$g(x) = x[f(x) + 2\ln x - 4].$$
   Démontrer que g est une primitive de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x$ et donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

Annexe 1 (à rendre avec sa copie)

Exercice 1

Affirmations	V	F
a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.		
b. L'équation $f(x) = 0,1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.		
c. $f'(1) = f(1)$.		
d. $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x < 5$.		
e. $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x < 1$.		
f. La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.		
g. $F(5) > F(6)$.		
h. La fonction f' est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.		

Annexe 2

Exercice 3

Représentation graphique des séries statistiques $(x_i\ ;\ y_i)$ et $(x_i\ ;\ q_i)$