∽ Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2000 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Dans chacun des calculs, donner les résultats sous forme de fiactions irréductibles.

1. Le jeune Bob obtient des résultats moyens à l'école. Pour le motiver, sa maman lui propose le jeu suivant : à chaque fois qu'il obtient une « bonne » note, il peut tirer successivement sans remise deux pièces dans un sac contenant 7 pièces de 5 francs et 3 pièces de 10 francs.

   Si les deux pièces sont de valeurs différentes, il garde ces deux pièces et sa maman complète le sac pour une autre fois.

   Si les deux pièces sont de même valeur, il remet les deux pièces dans le sac.

   Déterminer la probabilité des évènements suivants :

   A : « Bob tire deux pièces de 5 francs » ;

   B : « Bob tire deux pièces de 10 francs » ;

   C : « Bob tire deux pièces de valeurs différentes ».

2. On conserve le principe du jeu du 1).

   On se propose de faire gagner un peu plus d'argent à Bob en changeant juste le nombre de pièces de 10 francs dans le sac, le nombre de pièces de 5 francs étant toujours de 7.

   On suppose qu'il y a n pièces dans le sac dont toujours 7 pièces de 5 francs (n est un entier naturel supérieur ou égal à 10).

   a. Montrer que la probabilité p_n de l'évènement « Bob tire deux pièces de valeurs différentes » est :

   $$p_n = \frac{14(n-7)}{n(n-1)}$$

   b. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[10\,;\,+\infty[$ par :

   $$f(x) = \frac{14(x-7)}{x(x-1)}.$$

   Étudier les variations de f et en déduire les deux valeurs entières consécutives de n entre lesquelles la fonction f présente son maximum. Donner alors la valeur maximale de p_n.

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de passagers sur une ligne aérienne entre 1994 et 1998 :

Année	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Nombre de passagers p_i	7 550	9 230	10 745	12 840	15 665

Dans cet exercice, les résultats numériques pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice, sans justification. Ils seront donnés sous forme décimale approchée à 10^{-3} *près par défaut sauf à la question* 3.

1. **a.** On pose $y_i = \ln(p_i)$.

   Recopier et compléter le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
y_i					

b. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées ; les graduations commencent à 0 sur l'axe des abscisses et à 8 sur l'axe des ordonnées).

Placer le point moyen G de ce nuage.

2. a. Justifier pourquoi un ajustement affine est acceptable.

b. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement affine (ou droite de régression) (D) de y en x.

Tracer la droite (D) sur le graphique précédent.

3. En supposant la même évolution du nombre de passagers, donner une estimation de ce nombre de passagers en l'an 2000 (arrondir le résultat à 100 près).

EXERCICE 2 **6 points**

Enseignement de spécialité

À l'entraînement, un jeune basketteur effectue des tentatives pour marquer un panier. Pour chaque tentative, il dispose de deux essais. On considère que la tentative est réussie si le premier essai est réussi ou, sinon, lorsque le second essai est réussi. Après plusieurs jours, son entraîneur a constaté que :

- la probabilité de réussir le premier essai est 0,5 ;
- la probabilité de réussir le deuxième essai, sachant que le premier a été raté, est 0,4.

Dans tout l'exercice, on considère que les tentatives successives sont indépendantes.

1. Le joueur fait une tentative de marquer un panier. Montrer que la probabilité de succès est $0,7$.

2. Le joueur effectue deux tentatives successives. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A « Réussir les deux tentatives » ;

B « Réussir les deux tentatives au premier essai ».

3. Le joueur effectue cinq tentatives successives. Quelle est la probabilité d'en réussir exactement quatre ? (Donner un résultat arrondi à $0,01$ près.)

4. Le joueur effectue n tentatives successives où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

a. Montrer que la probabilité p_n de l'évènement : « Le joueur réussit au moins une tentative », est :

$$p_n = 1 - 0,3^n.$$

b. Déterminer le sens de variation de la suite (p_n).

Déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

c. Déterminer le nombre minimal n de tentatives que doit effectuer le joueur pour que la probabilité p_n soit supérieure à $0,999$.

PROBLÈME **10 points**

La répartition de la masse salariale d'une entreprise entre ses salariés peut être décrite par une fonction f qui permet d'apprécier si la distribution des salaires est plus ou moins régulièrement répartie. Une telle fonction, qui indique des pourcentages de salaires en fonction de pourcentages d'individus, est définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et satisfait aux conditions (C) suivantes :

(C_1) : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;

(C_2) : f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$;

(C_3) : pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $f'(x) \leqslant x$.

Ce problème a pour but d'étudier deux de ces fonctions, de tracer leur courbe représentative et de comparer la répartition des masses salariales des entreprises correspondantes.

Partie I

⋆ **Étude d'une fonction préliminaire**

On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$g(x) = 1 - \mathrm{e}^{x-1}.$$

Calculer $g'(x)$, où g' désigne la fonction dérivée de g ; étudier son signe.
Calculer $g(0)$ et $g(1)$; en déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,1]$.

Partie II

On considère deux entreprises P et Q pour lesquelles les fonctions p et q donnant les répartitions de masse salariale sont définies sur $[0\,;\,1]$ par :

$$p(x) = x^2 \quad \text{et} \quad q(x) = x\mathrm{e}^{x-1}.$$

⋆ **A. Étude des conditions (C) pour les fonctions p et q**

1. Montrer que la fonction p vérifie les trois conditions (C_1), (C_2), (C_3).

2. **a.** Montrer que la fonction q vérifie la condition (C_1).

b. Calculer $q'(x)$ où q' désigne la fonction dérivée de q.
Étudier le signe de $q'(x)$ sur $[0\,;\,1]$.
Montrer que la fonction q vérifie la condition (C_2).

c. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$: $x - q(x) = xg(x)$ où g est la fonction de la partie 1.
Montrer que la fonction q vérifie la condition (C_3).

⋆ **B. Tracé des courbes représentatives des fonctions p et q**

On appelle (Δ) la droite d'équation $y = x$ et on appelle respectivement $\left(\Gamma_p\right)$ et $\left(\Gamma_q\right)$ les représentations graphiques des fonctions p et q dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 10 cm.
Recopier et compléter le tableau suivant (donner les valeurs arrondies à 0,01 près).

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$p(x)$											
$q(x)$											

Tracer (Δ), $\left(\Gamma_p\right)$ et $\left(\Gamma_q\right)$ dans le repère défini ci-dessus.

Partie III

⋆ **Coefficient de Gini**

Le coefficient de Gini d'une entreprise est un indicateur d'inégalité de répartition salariale dans l'entreprise. Plus il est grand, plus la répartition des salaires est inégale. Dans une entreprise dont la répartition de la masse salariale est décrite par une fonction f satisfaisant aux conditions (C), on appelle coefficient de Gini le nombre réel :

$$G_f = 2\int_0^1 [x - f(x)]\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer le coefficient de Gini G_p de l'entreprise P

2. **a.** Montrer que la fonction Q définie sur $[0\,;\,1]$ par $Q(x) = (x-1)\mathrm{e}^{x-1}$ est une primitive de la fonction q sur $[0\,;\,1]$.

b. Calculer le coefficient de Gini G_q de l'entreprise Q.

3. Comparer G_p et G_q.
Dans laquelle des deux entreprises la répartition de la masse salariale est-elle la plus inégale ? justifier la réponse.