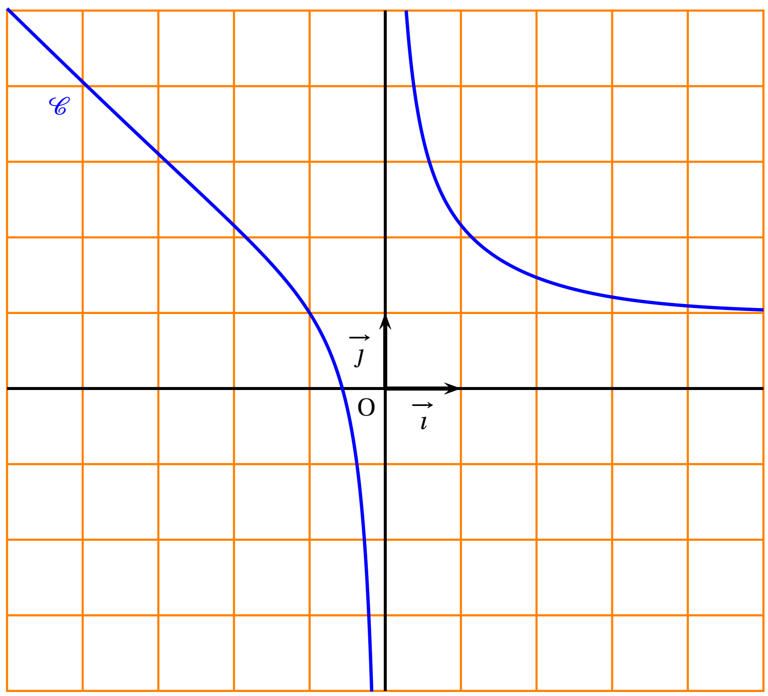
Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

Lecture graphique



La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessus est une représentation graphique, dans le plan muni du repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$.
L'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = 1$ sont deux asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

1. Lire les limites de la fonction f aux bornes de l'ensemble de définition.
2. Résoudre graphiquement :
   a. $f(x) = 1$;
   b. $f(x) > 1$.

Partie B

On admet que la fonction f représentée par la courbe précédente est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par :

$$f(x) = \frac{\text{e}^x + x}{\text{e}^x - 1}.$$

1. a. Vérifier que l'on a : $f(x) = \dfrac{1 + \frac{x}{\text{e}^x}}{1 - \frac{1}{\text{e}^x}}$.
   b. Retrouver alors, en justifiant, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
2. a. Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $(\text{e}^x - 1)$.
   b. Résoudre l'inéquation $\dfrac{\text{e}^x + x}{\text{e}^x - 1} > 1$.
3. a. Démontrer que : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) + x\right] = 0$.

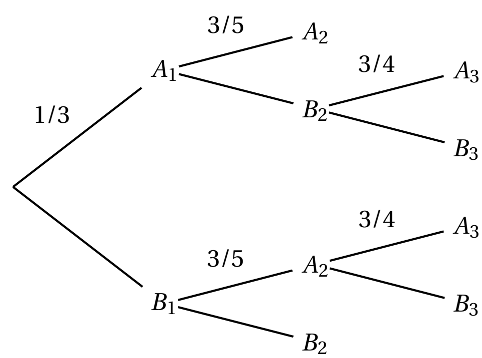
b. Que peut-on en déduire ?

4. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

EXERCICE 2 **5 points**

Alain et Benjamin pratiquent assidûment le tennis. Lorsqu'ils disputent un match l'un contre l'autre, est déclaré vainqueur le premier qui remporte deux manches.

Alain et Benjamin décident de faire un match.
On considère les évènements :
A_i : « Alain remporte la i-ième manche » ;
B_i : « Benjamin remporte la i-ième manche ».
On donne ci-contre l'arbre pondéré présentant toutes les issues possibles de cette rencontre.



1. Quelle est la probabilité qu'Alain remporte ce match en trois manches ?
2. Démontrer que la probabilité qu'Alain gagne cette rencontre est 0,6.
3. Ils décident de jouer trois matchs dans l'année (les résultats des matchs sont indépendants les uns des autres) et de faire une cagnotte pour s'offrir un repas en fin d'année. À la fin de chaque match, le perdant versera 20 €.
   Benjamin s'interroge sur sa dépense éventuelle en fin d'année.
   a. Quelles sont les dépenses possibles de Benjamin ?
   b. Démontrer que la probabilité que Benjamin dépense 40 € est 0,432.
   c. Quelle est la loi de probabilité associée à la dépense possible de Benjamin ?
   d. Calculer l'espérance de dépense en fin d'année pour Benjamin.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Monsieur X a placé 2 000 € le 31 décembre 2002 sur son livret bancaire, à intérêts composés au taux annuel de 3,5 % (ce qui signifie que, chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts). À partir de l'année suivante, il prévoit de placer, chaque 31 décembre, 700 € supplémentaires sur ce livret.
On désigne par C_n le capital, exprimé en euros, disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $(2003+n)$, où n est un entier naturel. Ainsi, on a :

$$\mathrm{C}_0 = 2\,000.$$

1. **a.** Calculer le capital disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier 2004.
   b. Établir, pour tout entier naturel n, une relation entre C_{n+1} et C_n.
2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = C_n + 20\,000.$$

   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$C_n = 22\,000 \times (1,035)^n - 22\,000.$$

d. Calculer le capital disponible le 1er janvier 2008 (on arrondira le résultat à l'euro près).

3. Le premier janvier 2008, Monsieur X retirera alors le capital disponible de la banque pour financer un voyage dont le coût (supposé fixe) est de 6 000 €. Il paiera cette somme en 4 mensualités qui seront 4 termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 800 €.
Calculer le montant de chacune de ces 4 mensualités.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]1~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(x^3 - x^2\right).$$

1. Justifier que, pour tout x de l'intervalle $]1~;~+\infty[$, $f(x)$ est définie.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$, puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3. On note f' la fonction dérivée de f. Vérifier que, pour tout x dans l'intervalle $]1~;~+\infty[$

$$f'(x) = \frac{3x-2}{x(x-1)}.$$

Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]1~;~+\infty[$.

4. **a.** Démontrer que l'équation :

$$f(x) = 0$$

admet sur $]1~;~+\infty[$ une solution unique α. Donner la valeur arrondie de α à 10^{-1} près.

b. Démontrer que $f(x)$ est strictement positif sur $]\alpha~;~+\infty[$.

5. Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm, tracer la courbe Γ représentative de la fonction f sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

6. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par :

$$h(x) = 2x\ln x + (x-1)\ln(x-1).$$

On note h' sa fonction dérivée.
Pour tout x de $]1~;~+\infty[$, calculer $h'(x)$.
En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$

Partie B

Interprétation économique

On considère une machine produisant un composé chimique liquide.
Pour qu'elle soit rentable, cette machine doit produire au moins 2 hectolitres.
De plus, le liquide produit est dangereux et impose une fabrication maximale de 9 hectolitres avant révision de la machine.
Pour tout x de $[2~;9]$, la valeur du coût marginal $c(x)$, exprimé en milliers d'euros, est donnée par :

$$c(x) = \ln\left(x^3 - x^2\right),$$

et $C_T(x)$ est le coût total de fabrication de x hectolitres de liquide. On rappelle que :

$$C'_T(x) = c(x).$$

où C'_T désigne la fonction dérivée de C_T.
Le coût total des deux premiers hectolitres (mise en route de la machine et fabrication) est 10 milliers d'euros, ce qui se traduit par $C_T(2) = 10$.

1. Déterminer le coût total $C_T(x)$ en fonction de x.

2. **a.** Calculer $C_T(9) - C_T(2)$. On donnera d'abord la valeur exacte, puis une valeur approchée à l'euro près.

b. Donner une interprétation graphique de la question **2. a.**.