Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1997

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Monsieur M est chargé de ventes à domicile pour le bénéfice d'une association.
À chaque personne sollicitée, il propose l'achat d'un livre seul, ou d'une cassette seule, ou l'achat d'un livre et d'une cassette.
Après un premier bilan de son activité, monsieur M estime que la probabilité qu'une personne visitée choisie au hasard achète un livre (évènement L) est 0,2, la probabilité qu'elle achète une cassette (évènement C) est $0,1$ et la probabilité qu'elle n'achète rien (évènement R) est $0,75$.

Partie A

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   D : « La personne visitée achète un livre ou une cassette ».
   E : « La personne visitée achète un livre et une cassette ».
   F : « La personne visitée achète seulement un livre ».
   G : « La personne visitée achète seulement une cassette ».
2. Sachant que la personne visitée a acheté un livre, quelle est la probabilité qu'elle ait acheté aussi une cassette ?

Partie B

Monsieur M se présente successivement chez n personnes choisies au hasard. Calculer la probabilité p_n qu'une personne au moins lui achète un livre ou une cassette.
Comment faut-il choisir l'entier naturel n pour avoir $p_n > 0,9$?

EXERCICE 2 **5 POINTS**
Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on donne un triangle ABC direct dont les angles sont aigus (c'est-à-dire que chacun des angles $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{BC}},\ \overrightarrow{\text{BA}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{CA}},\ \overrightarrow{\text{CB}}\right)$ admet une mesure comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$).
AEB est le triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{\text{AE}},\ \overrightarrow{\text{AB}}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
ACF est le triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{\text{AC}},\ \overrightarrow{\text{AF}}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
On présentera les données sur une figure que l'on complétera progressivement.

1. En utilisant la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, démontrer que : CE = BF et
   $\left(\overrightarrow{\text{EC}},\ \overrightarrow{\text{BF}}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
2. Les droites (EC) et (BF) se coupent en un point I.
   Démontrer que le cercle (C_1) circonscrit au triangle AEB et le cercle (C_2) circonscrit au triangle ACF passent par le point I.
3. Soit M le milieu de [EC] et N le milieu de [BF].
   a. Démontrer que le triangle AMN est équilatéral direct.
   b. Démontrer que le cercle (C) circonscrit au triangle AMN passe aussi par le point I.

PROBLÈME **11 POINTS**

La partie I est l'étude d'une fonction auxiliaire g nécessaire à l'étude de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}.$$

L'étude de la fonction f fait l'objet de la partie II.
La partie III est l'étude de deux suites numériques associées.

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 2\ln x.$$

/medskip

1. Étudier le sens de variation de g.
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0~;~+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}.$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal ? (unité graphique 2 cm).

1. Déterminer la limite de f en 0.
   Interpréter graphiquement le résultat.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{x}{2}$? est asymptote à la courbe (C).
   c. Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) sur $]0~;~+\infty[$.
   Montrer, en particulier, que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on déterminera.
3. Étudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (Δ).
   Préciser les coordonnées de B.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α.
   Justifier l'encadrement : $0,34 < \alpha < 0,35$.
6. Tracer la courbe (C) et les droites (Δ) et (T).

Partie III

On considère la suite numérique (x_n) définie par $x_n = \mathrm{e}^{\frac{n-2}{2}}$ pour tout nombre entier naturel n.

1. **a.** Montrer que (x_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
   b. Montrer que (x_n) est une suite croissante.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $a_n = 4\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[f(x) - \frac{x}{2}\right]\,\mathrm{d}x$.
   a. Donner une interprétation géométrique de a_n.
   b. Montrer que $a_n = \dfrac{2n+1}{2}$ pour tout nombre entier naturel n.
   En déduire que (a_n) est une suite arithmétique.