

~ Baccalauréat S Amérique du Sud ~

novembre 2003

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Un sac contient 4 jetons numérotés respectivement -1 , 0 , 0 , 1 et indiscernables au toucher. On tire un jeton du sac, on note son numéro x et on le remet dans le sac; on tire un second jeton, on note son numéro y et on le remet dans le sac; puis on tire un troisième jeton, on note son numéro z et on le remet dans le sac.

Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés.

À chaque tirage de trois jetons, on associe, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le point M de coordonnées (x, y, z) .

Sur le graphique joint en annexe page 6, sont placés les 27 points correspondant aux différentes positions possibles du point M . Les coordonnées du point A sont $(1; -1; -1)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note $\mathcal{C}$ le cube ABCDEFGH.

1. Démontrer que la probabilité que le point M soit en A est égale à $\frac{1}{64}$.
2. On note E_1 l'évènement : « M appartient à l'axe des abscisses ».
Démontrer que la probabilité de E_1 est égale à $\frac{1}{4}$.
3. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par O et orthogonal au vecteur $\vec{n}(1; 1; 1)$.
 - a. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
 - b. Tracer en couleur sur le graphique de la page 5, la section du plan $\mathcal{P}$ et du cube $\mathcal{C}$. (On ne demande pas de justification).
 - c. On note E_2 l'évènement : « M appartient à $\mathcal{P}$ ».
Quelle est la probabilité de l'évènement E_2 ?
4. On désigne par $\mathcal{B}$ la boule de centre O et de rayon 1,5 (c'est-à-dire l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leq 1,5$).
On note E_3 l'évènement : « M appartient à la boule $\mathcal{B}$ ».
Déterminer la probabilité de l'évènement E_3 .

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 4 cm). Soit I le point d'affixe 1. On note $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [OI] et on nomme son centre Ω .

Partie I

On pose $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et on note A_0 son image.

1. Montrer que le point A_0 appartient au cercle $\mathcal{C}$.
2. Soit B le point d'affixe b , avec $b = -1 + 2i$, et B' le point d'affixe b' telle que $b' = a_0 b$.

- a. Calculer b' .
- b. Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B' .

Partie II

Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe. À tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az$.

1. On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle OMM' soit rectangle en M' .
 - a. Interpréter géométriquement $\arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$.
 - b. Montrer que $\left(\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M}\right) = \arg\left(\frac{a-1}{a}\right) + 2k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$).
 - c. En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle $\mathcal{C}$ privé de O et de I .
2. Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de O .
 On note x son affixe.
 On choisit a de manière que A soit un point de $\mathcal{C}$ différent de I et de O .
 Montrer que le point M' appartient à la droite (OA) .
 En déduire que M' est le projeté orthogonal de M sur cette droite.

EXERCICE 2

5 points

Enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation

$$(E): \quad 3y = 5(15 - x).$$

2. Soit I le point d'affixe 1.

On considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O .

Sa position initiale est en I .

On appelle d la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcourue le point A sur le cercle $\mathcal{C}$ après avoir subi p rotations r_1 et q rotations r_2 (p et q étant des entiers naturels).

On convient que lorsque A subit la rotation r_1 (respectivement r_2), il parcourt une distance de $\frac{\pi}{3}$ cm (respectivement $\frac{\pi}{5}$ cm).

Déterminer toutes les valeurs possibles de p et q pour lesquelles le point A a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle $\mathcal{C}$ à partir de I .

Partie B

On note h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 4 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport -6 . On pose $s_1 = r_1 \circ h_1$ et $s_2 = r_2 \circ h_2$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s_1 et s_2 .
2. On pose :
 - $S_m = s_1 \circ s_1 \cdots \circ s_1$ (composée de m fois s_1 , m étant un entier naturel non nul),
 - $S'_n = s_2 \circ s_2 \cdots \circ s_2$ (composée de n fois s_2 , n étant un entier naturel non nul), et
 - $f = S'_n \circ S_m$.
 - a. Justifier que f est la similitude directe de centre O, de rapport $2^{2m+n} \times 3^n$ et d'angle $m\frac{\pi}{3} + n\frac{6\pi}{5}$.
 - b. f peut-elle être une homothétie de rapport 144?
 - c. On appelle M le point d'affixe 6 et M' son image par f .
Peut-on avoir $OM' = 240$?
Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels unique (m, n) tel que $OM' = 576$.
Calculer alors la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'})$.

PROBLÈME**11 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Étudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
2. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $e^{-x} \leq e^x$.
3. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
4. On considère les fonctions g et h définies sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{e^x}$ et $h(x) = \frac{1}{2e^x}$.

Sur l'annexe sont tracées, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives de g et h , notées respectivement Γ_1 et Γ_2 .

- a. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
- b. Que peut-on en déduire pour les courbes Γ , Γ_1 , et Γ_2 ?
Tracer Γ sur l'annexe, en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \int_n^{n+1} f(x) \, dx$.

1. Justifier l'existence de (I_n) , et donner une interprétation géométrique de (I_n) .
2. **a.** Démontrer, que pour tout entier naturel n , $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$.
b. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
c. Démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie C

Soit (J_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $J_n = \int_0^n f(x) \, dx$.

1. En utilisant l'encadrement obtenu dans la question **A. 4. a.**, démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \leq J_n \leq 1 - e^{-n} \leq 1.$$

2. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
En déduire qu'elle converge.
3. On note L la limite de la suite (J_n) et on admet le théorème suivant :
« Si u_n , v_n et w_n sont trois suites convergentes de limites respectives a , b et c et si, à partir d'un certain rang on a pour tout n , $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors $a \leq b \leq c$ ».
Donner un encadrement de L .
4. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

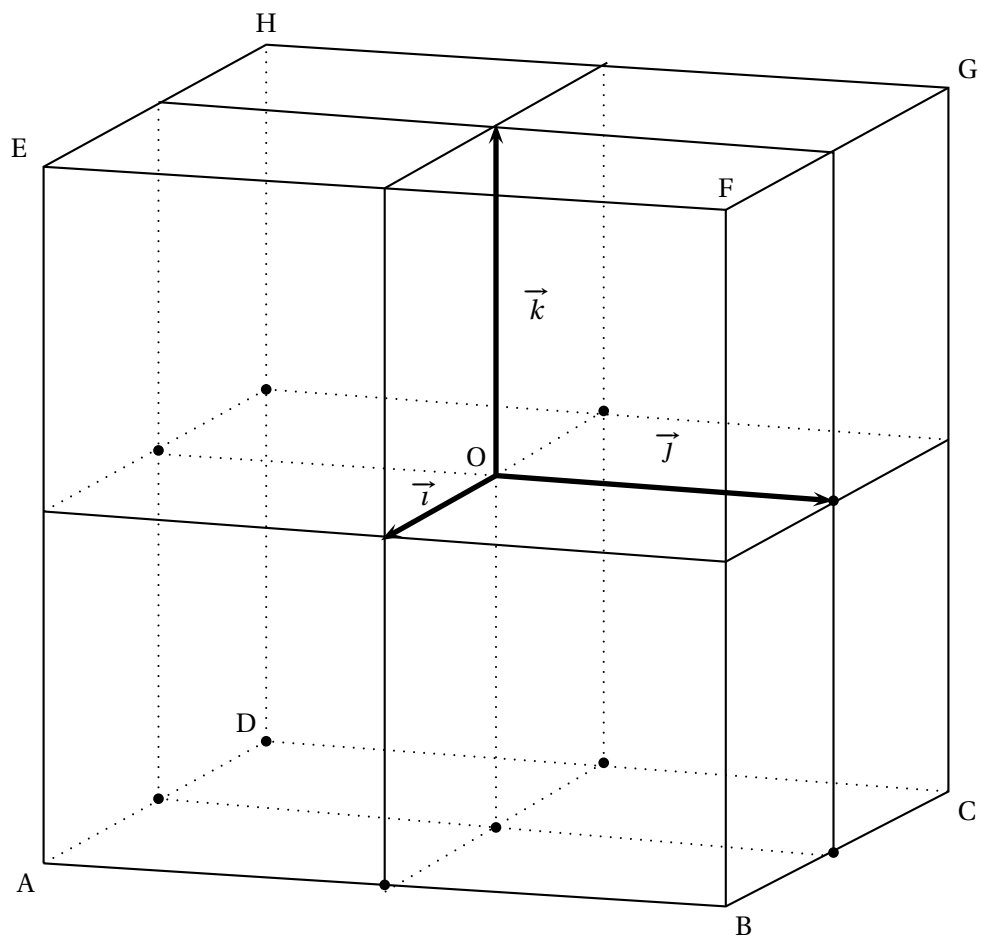
On note v la primitive de u sur $\mathbb{R}$ telle que $v(1) = \frac{\pi}{4}$.

On admet que la courbe représentative de v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \frac{\pi}{2}$.

- a.** Démontrer que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1}$.
- b.** Démontrer que, pour tout réel x , f est la dérivée de la fonction $x \mapsto v(e^x)$.
- c.** En déduire la valeur exacte de L .

Annexe de l'exercice 1

Cette page sera complétée et remise avec la copie



Annexe du problème

Cette page sera complétée et remise avec la copie

Courbes Γ_1 et Γ_2 