Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2006

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points :
A de coordonnées $(3\ ;\ 1\ ;\ -5)$, B de coordonnées $(0\ ;\ 4\ ;\ -5)$, C de coordonnées $(-1\ ;\ 2\ ;\ -5)$ et D de coordonnées $(2\,;\,3\,;\,4)$.

Pour chacune des six affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée. Le candidat doit indiquer sur sa copie le numéro de la question et la mention « VRAI » *ou* « FAUX ». *On attribue* 0,5 *point par réponse correcte et on retranche* 0,25 *point par réponse incorrect.*
L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Les points A, B et D sont alignés.
2. La droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne : $x + y = 4$.
3. Une équation cartésienne du plan (BCD) est : $18x - 9y - 5z + 11 = 0$.
4. Les points A, B, C et D sont coplanaires.
5. La sphère de centre A et de rayon 9 est tangente au plan (BCD).
6. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 - 2k \\ y & = & \dfrac{7}{2} + k, \quad k \in \mathbb{R} \\ z & = & -\dfrac{1}{2} - 9k \end{array}\right.$$

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. *Question de cours*

   On rappelle que : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = \left(\vec{u},\ \vec{w}\right)$ ».

   Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

   a. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{MP}\right)$.

   b. Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$

2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 4 + \text{i}, \quad z_{\text{B}} = 1 + \text{i}, \quad z_{\text{C}} = 5\text{i et } z_{\text{D}} = -3 - \text{i}.$$

   Placer ces points sur une figure.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1 + 2\text{i})z - 2 - 4\text{i}.$$

a. Préciser les images des points A et B par f.

b. Montrer que f admet un unique point invariant Ω, dont on précisera l'affixe ω.

4. **a.** Montrer que pour tout nombre complexe z, on a :

$$z' - z = -2\mathrm{i}(2 - \mathrm{i} - z).$$

b. En déduire, pour tout point M différent du point Ω, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}\right)$

c. Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?

d. Soit E le point d'affixe $z_{\mathrm{E}} = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$. Écrire z_{E} sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E$'$ associé au point E.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Rappel :
Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \mod 7$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances*

a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
Démontrer que : si $a \equiv b \mod 7$ et $c \equiv d \mod 7$ alors $ac \equiv bd \mod 7$.

b. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls
si $a \equiv b \mod 7$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \mod 7$.

2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \mod 7$.

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a. Montrer que : $a^6 \equiv 1 \mod 7$.

b. On appelle *ordre* de $a \mod 7$, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \mod 7$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \mod 7$.
En déduire que k divise 6.
Quelles sont les valeurs possibles de k ?

c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4. À tout entier naturel n, on associe le nombre

$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n.$$

Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \mod 7$.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.
La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\dfrac{1}{4}$.
La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\dfrac{1}{2}$.
Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.
Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 50$.
On définit les évènements suivants :

— A : « le jardinier a choisi le lot 1 »
— B : « le jardinier a choisi le lot 2 »
— J_n : « le jardinier obtient n tulipes jaunes ».

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.

a. Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?

b. Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?

c. Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes,

d. Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

2. Probabilités conditionnelles

a. Montrer que : $P_B(J_n) = \binom{50}{n}2^{-50}$.

b. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

c. On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé. établir que :

$$p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}.$$

d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geqslant 0,9$?
Comment peut-on interpréter ce résultat ?

EXERCICE 4 **8 points**
Commun à tous les candidats

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

a. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n.

b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0~;~+\infty[$. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1~;~\text{e}]$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

a. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0~;~1)$ et le point B_n de coordonnées $(n~;~0)$.

b. Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

c. Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.

d. Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).

3. a. Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.

b. Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que :
$f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

c. Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).

d. Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite.
Établir que : $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ.

4. On désigne par $\mathcal{D}_n$ le domaine délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = \mathrm{e}$.
   a. Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ en fonction de α_n et montrer que cette aire est égaie à $\dfrac{\alpha_n^2}{n}$.
   b. Établir que :

$$(\mathrm{e} - \alpha_n) \ln \alpha_n \leqslant \frac{\alpha_n^2}{n} \leqslant (\mathrm{e} - \alpha_n).$$

   c. En déduire un encadrement de $n(\mathrm{e} - \alpha_n)$.
   d. La suite de terme général $n(\mathrm{e} - \alpha_n)$ est-elle convergente ? Ce résultat permet-il d'apprécier la rapidité de la convergence de la suite (α_n) ?