Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2008 ∽

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = -1+2\text{i}$, $b = 1+3\text{i}$, $c = 4\text{i}$.

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.

2. Soit I le milieu de [BC] et z_{I} son affixe.

a. Quel est l'ensemble des points M du plan distincts de A dont l'affixe z est telle que $\dfrac{z - z_{\text{I}}}{z-a}$ soit un réel ?

b. Déterminer l'unique réel x tel que $\dfrac{x - z_{\text{I}}}{x-a}$ soit un réel.

c. Soit $z_{\overrightarrow{\text{AI}}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{AI}}$, donner une forme trigonométrique de $z_{\overrightarrow{\text{AI}}}$.

3. **a.** Soit G le point d'affixe -3. Montrer qu'il existe deux rotations de centre G, dont on déterminera les angles, telles que les images de A et I par ces rotations soient toutes deux sur l'axe des réels.

b. Soit r_1 la rotation de centre G et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{4}$.

Déterminer l'écriture complexe de r_1.

4. Soit A$'$, B$'$ et C$'$ les images respectives de A, B, et C par la rotation r_1 ; soient a', b' et c' leurs affixes.

Quelle est l'image par r_1 de l'axe de symétrie du triangle ABC ?

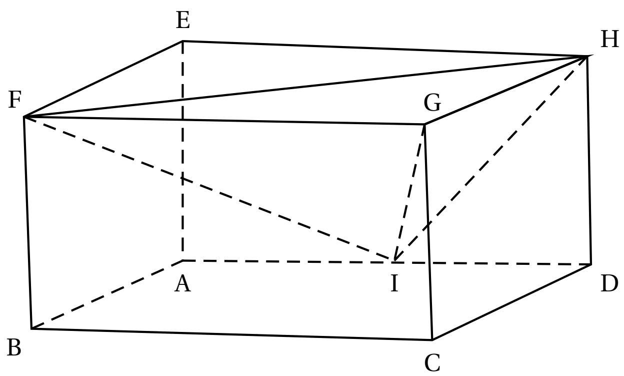
En déduire que $b' = \overline{c'}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit ABCDEFGH tel que : AB = 1, AD = 2 et AE = 1.

On appelle I le milieu de [AD].



L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AI}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.

2. **a.** Montrer que le volume V du tétraèdre GFIH est égal à $\dfrac{1}{3}$.

b. Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.

En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).

3. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (FIH).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).

c. Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).

4. **a.** La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?

b. Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

c. Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*

Soit Γ la sphère de centre G passant par K.

Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ?

(On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection)

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.

Soit D la droite passant par le point A de coordonnées $(0\,;0\,;2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1\,;1\,;0)$ et soit D' la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t' \\ y & = & -t' \\ z & = & -2 \end{array}\right. \quad (t' \in \mathbb{R})$$

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble S des points de l'espace équidistants de D et de D'.

1. **Une équation de S**

a. Montrer que D et D' sont orthogonales et non coplanaires.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite D.

Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et H le projeté orthogonal de M sur D. Montrer que $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{-x+y}{2}\ ;\ \dfrac{x-y}{2}\ ;\ 2-z\right)$.

En déduire MH^2 en fonction de $x,\ y$ et z.

Soit K le projeté orthogonal de M sur D'. Un calcul analogue au précédent permet d'établir que : $MK^2 = \dfrac{(x+y)^2}{2} + (2+z)^2$, relation que l'on ne demande pas de vérifier.

c. Montrer qu'un point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à S si et seulement si $z = -\dfrac{1}{4}xy$.

2. **Étude de la surface S d'équation $z = -\dfrac{1}{4}xy$**

a. On coupe S par le plan $(x\text{O}y)$. Déterminer la section obtenue.

b. On coupe S par un plan P parallèle au plan $(x\text{O}y)$.

Quelle est la nature de la section obtenue ?

c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*

On coupe S par le plan d'équation $x + y = 0$. Quelle est la nature de la section obtenue ?

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0~;~+\infty[$, positive sur $[1~;~+\infty[$, et vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l}\ln 1 = 0\\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y\\ \text{Pour tout réel strictement positif} x,\ [\ln(x)]' = \dfrac{1}{x}\\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}\end{array}\right.$$

1. On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

a. Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0~;~+\infty[$.

b. En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

c. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$2y' + y = 0 \quad \text{(E)},$$

dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On considère l'équation différentielle :

$$2y' + y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad \text{(E}'\text{)}$$

a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right) \text{ soit solution de (E}'\text{).}$$

b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que g est solution de l'équation (E$'$) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).

Résoudre l'équation (E$'$).

3. Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x\right)$.

4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.

5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

a. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Γ.

b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.