∽ Baccalauréat C Amérique du Sud décembre 1978 ∾

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 1 977.
   En déduire l'ensemble des couples $(x ; y)$ de $\mathbb{N}^2$ vérifiant :
   $$x^2 - y^2 = 1977.$$
2. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$:
   $$x^2 - y^2 = 1978.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Les coordonnées dans ce repère d'un point mobile M sont données en fonction du temps t par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 2 - \sin t \\ y & = & 1 + \cos 2t \end{array}\right.$$

1. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération de M.
2. Trouver une équation cartésienne du support P dt' la trajectoire de M. Construire P.
3. Définir de manière précise la trajectoire de M. Le mouvement de ce mobile est-il périodique ? Quelle est sa périodicité ?
4. Décrire le mouvement de M lorsque t varie de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$ en précisant s'il est accéléré ou retardé.

PROBLÈME **13 POINTS**

Les parties A, B et la question C, 1. du problème sont indépendantes

Étant donné un nombre réel α non nul, on associe à tout couple $(a,\ b)$ de nombres réels, l'application $f_{a,\ b}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_{a,\ b}(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{\alpha x}.$$

Partie A

Dans cette partie, on suppose $\alpha = 1$ et on désigne par f l'application qui correspond au cas particulier $a = b = 1$.

1. Étudier les variations de f et tracer sa représentation graphique C dans un plan rapporté à un repère cartésien orthonormé. Préciser les branches infinies,
2. On considère la fonction g définie par :
   $$g(x) = \mathrm{Log}|f(x)|.$$
   Etudier les variations de g et tracer sa représentation graphique C_1 sur la même figure que C. Préciser ses branches infinies,

Partie B

Dans toute la suite du problème, α est un réel non nul donné. On désigne par E l'ensemble des applications $f_{a,\,b}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications dérivables sur $\mathbb{R}$.

Établir que $\mathcal{B} = \left(f_{1,\,0},\ f_{0,\,1}\right)$ est une base de E.

2. Calculer la fonction dérivée $f'_{a,\,b}$ de $f_{a,\,b}$. Vérifier que : a, l" E E . a,b On considère l'application φ qui, à tout élément $f_{a,\,b}$ de E associe $\varphi\left(f_{a,\,b}\right) = f'_{a,\,b}$.

Établir que φ est un endomorphisme de E. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$. L'application φ est-elle un automorphisme de E ?

3. On pose $\varphi^1 = \varphi$ et, par recurrence, $\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Calculer, en utilisant un raisonnement par récurrence, la matrice de φ^n.

En déduire expression de la fonction $f^{(n)}_{a,\,b}$, dérivée d'ordre n de $f_{a,\,b}$.

$\left(n \in \mathbb{N}^\star\right.$ et, selon l'usage, $\left.f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = f''\right)$.

4. Dans cette question, on suppose α non nul. On considère la suite U telle que $f_{a,\,b}\left(U_0\right) = 0$ et $f^{(n)}_{a,\,b}\left(U_N\right) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Calculer U_n en fonction de n. Indiquer la nature de la suite U et préciser son sens de variation suivant les valeurs de α.

Partie C

1. Calculer les intégrales :

$$I = \int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^x t\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

2. On considère l'application $g_{a,\,b}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g_{a,\,b}(x) = \int_0^x f_{a,\,b}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer $g_{a,\,b}(x)$. Quelle relation doivent vérifier les nombres a, b et α, pour que $g_{a,\,b}$ soit un élément de E ?

Établir que l'ensemble E$'$ des applications $f_{a,\,b}$ correspondantes est un sous-espace vectoriel de E. Donner une base de E$'$.

3. Déterminer, dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de l'automorphisme réciproque φ^{-1} de φ, défini dans la question B 2.

Calculer $\varphi^{-1}\left(f_{a,\,b}\right)$ et retrouver $g_{a,\,b}(x)$ à l'aide de ce résultat.