Baccalauréat Amérique du Sud mars 1968
Mathématiques élémentaires

I.

On considère le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ et l'on forme $Z = \dfrac{z^2}{1 - z}$.

1. Calculer la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.
   m étant le point image de z, quel est l'ensemble des points m pour lesquels Z est réel ?
2. On désigne le module de z par r, son argument par θ.
   Quels sont le module et l'argument de $\dfrac{1}{z^2}$ et de $\dfrac{1}{z}$?
   Exprimer Z en fonction de r et θ.
   En déduire l'ensemble des points m pour lesquels $\dfrac{1}{Z}$ est réel.

II.

Résoudre l'équation

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2.$$

III.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O.
(C) est le cercle de centre O et de rayon R.

1. Étant donné un point $\mathrm{M}\left(x_0~;~y_0\right)$ extérieur à (C), on appelle $(\mathrm{C_M})$ le cercle de centre M orthogonal à (C).
   Indiquer une construction géométrique de $(\mathrm{C_M})$.
   Calculer la puissance de M par rapport au cercle (C) en fonction de x_0, y_0 et R.
   Écrire l'équation du cercle $(\mathrm{C_M})$.
2. Soit (D) la polaire d'un point $\mathrm{P}\left(x_1~;~y_1\right)$ par rapport à $(\mathrm{C_M})$.
   Indiquer une construction géométrique de (D).
   Montrer que l'équation de (D) est
   $$\left(x_1 - x_0\right)x + \left(z_1 - y_0\right)y - x_0x_1 - y_0y_1 + \mathrm{R}^2 = 0.$$
3. On suppose que (D) a pour équation $y = \mathrm{R}$.
   Étant donné un point $\mathrm{P}\left(x_1~;~y_1\right)$, existe-t-il un point $\mathrm{M}\left(x_0~;~y_0\right)$ tel que (D) soit la polaire de P par rapport à $(\mathrm{C_M})$?
   Donner une solution géométrique, dont on retrouvera le résultat en utilisant l'équation proposée au **2.**
4. (D) est définie comme au **3.** ; P décrit la droite $y = x + 2\mathrm{R}$.
   Trouver l'équation de l'ensemble, (Γ), des points M tels que (D) soit la polaire de P par rapport à $(\mathrm{C_M})$.
   Représenter graphiquement (Γ).
   Cette courbe coupe Ox en deux points, d'abscisses x' et x'' $(x'' > 0)$.
   Calculer l'aire limitée par (Γ), l'axe des x et les points d'abscisses x' et x''.
   On calculera, au préalable, la dérivée de Log $|lx + k|$, k étant une constante.