

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1985 ∞

EXERCICE 1

4 points

Dans le plan, on considère le parallélogramme KMLN et le point de concours O de ses diagonales (MN) et (KL).

Soit A un point de la droite (KN), distinct de K et de N.

Soit B le point d'intersection de la droite (MA) et de la droite (LN).

P et Q sont respectivement les projetés, parallèlement à la droite (MN), de A sur la droite (KM) et de B sur la droite (LM).

1. Faire une figure.
2. a. On note h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{\overline{KA}}{\overline{KN}}$.
Démontrer que $h(M) = P$.
En déduire que le milieu I du segment [AP] appartient à la droite (KL).
b. Indiquer l'homothétie qui permettrait de démontrer que le milieu J du segment [BQ] appartient à la droite (KL).
3. Justifier que les points N, P, Q sont les images respectives des points M, A, B par une symétrie dont on précisera l'axe et la direction.
En déduire que les points N, P, Q sont alignés.

EXERCICE 2

4 points

Dans le plan rapporté à une repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C deux à deux distincts dont les affixes respectives sont les nombres complexes a, b, c .

1. M étant le point du plan d'affixe z , exprimer, en fonction de z :
 - a. l'affixe z' du point M' image de M par la rotation de centre A et d'angle de mesure $+\frac{\pi}{3}$ (en radians);
 - b. l'affixe z'' du point M'' image de M par la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$ (en radians).
2. Que peut-on dire du triangle ABC si les nombres complexes a, b, c vérifient
 - a. $\frac{c-a}{b-a} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$;
 - b. $\frac{c-a}{b-a} = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$.
3. Établir que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si :

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

PROBLÈME

12 points

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions numériques g , dérivables sur \mathbb{R} , vérifiant :

$$(1) \quad \text{pour tout nombre réel } x, \quad g'(x) - g(x) = x - \frac{e-2}{e-1},$$

où e désigne la base du logarithme népérien.

1. Déterminer l'unique fonction affine g_0 vérifiant (1).
2. On note h la fonction : $h = g - g_0$; démontrer que g vérifie (1) si et seulement si h est solution de l'équation différentielle (2) $y' - y = 0$.
3. Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (2) et en déduire l'ensemble des fonctions g vérifiant (1).
Déterminer la fonction vérifiant (1) qui s'annule en zéro.

Partie B

1. On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{1}{e-1} e^x - x - \frac{1}{e-1}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- a. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.
 - b. Étudier le sens de variation de f et les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition.
Montrer que la courbe (C) admet une droite asymptote que l'on précisera.
 - c. Utiliser les variations de f pour déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .
 - d. Tracer la courbe (C) sur une feuille de papier millimétré (en prenant 2cm pour unité de longueur).
2. On considère la fonction numérique Φ de la variable réelle x définie par :

$$\Phi(x) = e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}.$$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de Φ dans le plan rapporté au même repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- a. Étudier le sens de variation de Φ et les limites de Φ aux bornes de l'intervalle de définition.
Montrer que la courbe (Γ) admet une droite asymptote que l'on précisera.
 - b. Étudier les positions relatives des courbes (C) et (Γ) .
 - c. Tracer la courbe (Γ) sur le même graphique que la courbe (C) .
3. Établir que pour tout nombre réel x : $\Phi(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$.
Donner une interprétation géométrique de $\Phi(0)$.
 4. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

- a. Démontrer que : $f(n) \leq \Phi(n) \leq f(n+1)$.

En déduire l'existence d'un unique réel un élément de l'intervalle $[n ; n+1]$ tel que

$$\Phi(n) = f(u_n).$$

- b. À l'aide des courbes (C) et (Γ), représenter sur l'axe des abscisses les points d'abscisses respectives u_1 et u_2 .

- c. On considère la suite de terme général $v_n = u_n - n$ où n est élément de \mathbb{N}^* .

Montrer que la suite (v_n) est bornée.

Établir que v_n vérifie l'égalité $\frac{e^{v_n}}{e-1} = 1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{v_n}{e^n}$.

En déduire que la suite (v_n) admet une limite que l'on déterminera.