Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1991 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Soit O un point fixe du plan orienté.
L'exercice propose d'étudier une famille $\mathscr{F}$ de cercles de rayons non nuls du plan tels qu'on puisse leur mener, depuis O, deux tangentes orthogonales.
Si C est un cercle de la famille $\mathscr{F}$, on note U_C et T_C les points de contact des tangentes à C issues de O.
Question préliminaire : pour un cercle C de $\mathscr{F}$, de centre I, indiquer la nature du quadrilatère $\mathrm{OU}_C\mathrm{IT}_C$.

1. **Étude d'une propriété caractéristique de la famille $\mathscr{F}$**

   Soit C un cercle du plan de rayon r $(r \neq 0)$ et de centre I.

   On pose OI = d. Démontrer que :

   C appartient à la famille $\mathscr{F}$ si et seulement si $d = r\sqrt{2}$.

2. **Étude de la famille $\mathscr{F}_{\mathrm{A}}$des cercles de la famille $\mathscr{F}$passant par un point A du plan**

   Soit A $\neq$ O un point du plan.

   a. Démontrer qu'un cercle C de centre I appartient à la famille $\mathscr{F}_{\mathrm{A}}$ si et seulement si C passe par A et OI = AI $\sqrt{2}$.

   b. Déterminer le lieu $\mathscr{L}$ des centres des cercles de la famille $\mathscr{F}_{\mathrm{A}}$. Préciser les points E et F d'intersection de $\mathscr{L}$ avec la droite (OA).

   c. Représenter sur une figure deux cercles de la famille $\mathscr{F}_{\mathrm{A}}$ ainsi que $\mathscr{L}$.

3. **Étude de la famille $\mathscr{F}_{\Delta}$ des cercles de la famille $\mathscr{F}$ centrés sur une droite Δ donnée ne passant pas par O**

   Soit Δ une droite donnée du plan ne passant pas par O.

   a. Démontrer que les points de contact U_C et T_C des tangentes issues de O aux cercles C de la famille $\mathscr{F}_{\Delta}$ décrivent deux droites Δ_1 et Δ_2.

   b. Représenter sur une figure deux cercles de la famille $\mathscr{F}_{\Delta}$ ainsi que les droites Δ, Δ_1, Δ_2.

EXERCICE 2 **5 points**

Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On rappelle que l'affixe d'un point M de coordonnées $(x\,;\ y)$ est le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.
On donne des réels r et α avec $r > 0$ et $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$ et on note u le nombre complexe de module r, d'argument α.

1. On construit les points A_n de P répondant aux conditions :

   - A_0 est l'origine du repère ;
   - A_1 est le point d'affixe i ;
   - pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le point A_n est l'image de A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-1}, de rapport r, dont une mesure de l'angle est α.

   On note z_n l'affixe du point A_n.

   a. Écrire pour tout entier n supérieur ou égal à 2 une relation entre z_n, z_{n-1} et z_{n-2}.

b. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a

$$z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}\mathrm{i}.$$

c. Déterminer l'expression de l'affixe z_n de A_n en fonction de n et u.

2. **a.** Montrer qu'il existe une similitude directe S, et une seule, telle que

$$A_1 = S(A_0) \quad \text{et} \quad A_2 = S(A_1).$$

Préciser les éléments caractéristiques de S.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $A_{n+1} = S(A_n)$.
On note S^0 l'application identique de P, et pour tout entier naturel n, on pose $S^{n+1} = S \circ S^n$.
Soit $p \in \mathbb{N}$; montrer que

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad A^{n+p} = S^n\left(A_p\right).$$

c. Montrer que S^4 est une homothétie.

d. En déduire que les points A_n sont éléments d'un ensemble formé par la réunion de quatre droites que l'on précisera.

3. On suppose maintenant $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On appelle Ω le centre de la similitude S.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ sont orthogonaux.

b. Représenter graphiquement les points $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_9$ dans le repère orthonormé $\left(\Omega ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité : 4 cm).

c. Calculer $\left\|\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}\right\|$ en fonction de n et de $\left\|\overrightarrow{\Omega A_0}\right\|$. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left\|\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}\right\|$.

d. Pour tout entier naturel n, calculer

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} \left\|\overrightarrow{A_i A_{i+1}}\right\|.$$

Étudier la limite de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 — 5 points

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. On note $\mathscr{C}$ le cercle passant par A, B, C et D.
Faire une figure. (On choisira AB = 4 cm).
On note :

t la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$,
r_{D} la rotation de centre D d'angle $\dfrac{\pi}{2}$,
r_1 la rotation de centre A d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$,
r_2 la rotation de centre A d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$.

On désire caractériser les transformations :

$$f = t \circ r_{\mathrm{D}} \quad g_1 = r_1 \circ f \quad g_2 = r_2 \circ f.$$

1. Démontrer que f, g_1 et g_2 sont des rotations dont on précisera l'angle. (On ne demande pas les centres).
2. **a.** Déterminer $f(\mathrm{D})$ et $f(\mathrm{A})$. Quel est le centre de f ?
   b. Déterminer $g_1(\mathrm{D})$ et $g_2(\mathrm{D})$.
3. Soit $\mathrm{A}'_1 = g_1(\mathrm{A})$ et $\mathrm{A}'_2 = g_2(\mathrm{A})$.
   a. Montrer, en utilisant $g_2 \circ g_1^{-1}$, que A est le milieu du segment $[\mathrm{A}'_1\,\mathrm{A}'_2]$.
   b. Montrer, en calculant $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AN}}}\right)$, que A'_1 est sur la tangente à $\mathscr{C}$ en A.
4. **a.** Soit J le centre de g_1 et K celui de g_2.
   Montrer que J et K appartiennent à $\mathscr{C}$ et qu'ils sont diamétralement opposés. Placer J et K sur la figure.
   b. Montrer que A'_1 est sur la droite (JB).
   Placer les points A'_1 et A'_2 sur la figure.

PROBLÈME **12 points**

À tout entier naturel $n \geqslant 1$ on associe la fonction numérique f_n définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [1~;~+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\,\frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan. (Choisir comme unités graphiques 1 cm sur $x'x$ et 10 cm sur $y'y$.)
La première partie propose l'étude de f_1 Dans les parties II et III on précise certains comportements des fonctions f_n et des primitives de ces fonctions.

I. Étude de f_1

1. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   Étudier les variations de f_1.
2. Tracer la tangente à $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse 1 puis tracer la courbe $\mathscr{C}_1$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour x élément de I :

$$I_1(x) = \int_1^x f_1(t)\,\mathrm{d}t.$$

II. Comportement des fonctions f_n pour $n \geqslant 1$

1. En remarquant que $\dfrac{(\ln x)^n}{x^2} = \left[\dfrac{(\ln x)}{x^{2/n}}\right]^n$, déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
2. **a.** Calculer $f'_n(x)$ et vérifier que $f'_n\left(\mathrm{e}^{n/2}\right) = 0$.
   Donner le tableau de variations de f'_n.
   b. Vérifier que la valeur maximale de f_n sur I est :

$$y_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2\mathrm{e}}\right)^n.$$

3. **a.** Soit $x \in \mathrm{I}$.
   Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f_2(x) - f_1(x)$.

b. Déterminer la tangente à $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse 1.
Préciser les positions relatives de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

4. On se propose d'étudier la suite $\left(y_n\right)_{n\geqslant 1}$.
Soit n un entier strictement positif.

a. Calculer, pour $x \geqslant 1$, $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$.

b. Montrer que $y_{n+1} = \dfrac{1}{2} f_n\left(\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}\right)$ et que $y_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} y_n$.

c. En déduire que $y_n \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}\dfrac{1}{2^n}$.
Quelle est la limite de la suite $\left(y_n\right)_{n\geqslant 1}$?

III. Étude de primitives de f_n sur I

À tout entier $n \geqslant 1$ et à tout nombre réel x de I, on associe l'intégrale

$$I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Soit $k \geqslant 1$ un entier.
Grâce à une intégration par parties démontrer la relation :

$$I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{1}{(k+1)!}\frac{(\ln x)^{k+1}}{x}.$$

b. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$I_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!x} - \cdots - \frac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)!x} - \frac{(\ln x)^n}{n!x}$$

2. Soit $\alpha \geqslant 1$ un nombre réel fixé.

a. Montrer que $0 \leqslant I_n(\alpha) \leqslant (\alpha - 1) y_n$ (y_n a été défini dans II. 2. b).

b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha)$. (On utilisera II. 4. c.).

3. Pour $n \geqslant 1$ et $x \geqslant 1$ on pose :

$$W_n(x) = 1 + \frac{\ln x}{1!} + \frac{(\ln x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\ln x)^n}{n!}.$$

a. Exprimer $W_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.

b. $\alpha \geqslant 1$ étant un nombre réel fixé, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} W_n(\alpha)$.

c. En déduire la limite γ de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

En s'aidant de la calculatrice donner une valeur décimale approchée de U_6 à 10^{-4} près.
Comparer cette valeur à γ.