

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2007 ∞

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connu le résultat suivant :

La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur \mathbb{R} telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.

Soit a un réel donné.

- Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.
 - Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = g(x)e^{-ax}$. Montrer que h est une fonction constante.
 - En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.
2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.
- Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur \mathbb{R} par :

$$f_0(x) = a \cos x + b \sin x$$

soit une solution f_0 de (E).

- Résoudre l'équation différentielle (E₀) : $y' = 2y$.
- Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E₀).
- En déduire les solutions de (E).
- Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

- On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i . On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB).
Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe $z' = -i\bar{z} + 1 + i$.
- On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2 . Donner l'écriture complexe de H .
- On note f la composée $H \circ S$.
 - Montrer que f est une similitude.
 - Déterminer l'écriture complexe de f .
- On appelle M'' l'image d'un point M par f .
 - Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM''} = -2\overrightarrow{AM}$ est la droite (AB).

- b. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM''} = 2\overrightarrow{AM}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB) .

EXERCICE 2**5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

Soit f l'application qui à tout point M de \mathcal{P} d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

1. Soit E le point d'affixe $z_E = -i$. Déterminer l'affixe du point E' , image de E par f .
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.
3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 .
Soit M un point distinct des points O , A et B .
 - a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0 , 1 et -1 , on a :

$$\frac{z' + 1}{z' - 1} = \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right)^2.$$

- b. En déduire une expression de $\frac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\frac{MB}{MA}$ puis une expression de l'angle $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$ en fonction de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.
4. Soit Δ la médiatrice du segment $[A, B]$. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O , alors M' est un point de Δ .
5. Soit Γ le cercle de diamètre $[A, B]$.
 - a. Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB) .
 - b. Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f ?

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère le point A de coordonnées $(-2 ; 8 ; 4)$ et le vecteur \vec{u} de coordonnées $(1 ; 5 ; -1)$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur \vec{u} .
2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives $x - y - z = 7$ et $x - 2z = 11$.
Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée (d') .
Montrer que le vecteur de coordonnées $(2 ; 1 ; 1)$ est un vecteur directeur de (d') .
3. Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.
4. On considère le point H de coordonnées $(-3 ; 3 ; 5)$ et le point H' de coordonnées $(3 ; 0 ; -4)$.
 - a. Vérifier que H appartient à (d) et que H' appartient à (d') .

- b. Démontrer que la droite (HH') est perpendiculaire aux droites (d) et (d') .
 - c. Calculer la distance entre les droites (d) et (d') , c'est-à-dire la distance HH' .
5. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{HH'} = 126$.

EXERCICE 4**6 points****Commun à tous les candidats**

1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f_1(x) = 2x - 2 + \ln(x^2 + 1).$$

- a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
 - b. Déterminer la dérivée de f_1 .
 - c. Dresser le tableau de variations de f_1 .
2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n , définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2 + 1)}{n}.$$

- a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
 - b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
 - c. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0; +\infty[$.
 - d. Justifier que, pour tout entier naturel n , $0 < \alpha_n < 1$.
3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.
4. Étude de la suite (α_n)
- a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.
 - b. En déduire qu'elle est convergente.
 - c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.