Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1989

EXERCICE 1 **6 POINTS**

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ direct.

Soit B un point de la droite de repère $\left(O~;~\vec{\imath}\right)$ et C un point de la droite de repère $\left(O~;~\vec{k}\right)$.

La droite Δ a pour repère $\left(B~;~\vec{\imath}\right)$.

La droite D a pour repère $\left(C~;~\vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer qu'il existe une droite L orthogonale à Δ et à D, coupant Δ en B et D en un point A.

2. **a.** Soit P le plan médiateur de [A, B] Quelle est l'image de D dans la réflexion par rapport à P ?

b. Dans le plan $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ déterminer deux droites D'_1 et D'_2 telles que la droite (OB) ait pour image la droite Δ dans les réflexions d'axes D'_1 et D'_2.

En déduire qu'il existe deux plans P'_1 et P'_2 tels que la droite (OB) ait pour image la droite Δ dans les réflexions par rapport à P'_1 et P'_2.

c. En déduire qu'il existe deux rotations de l'espace, R_1 et R_2 transformant D en Δ. Déterminer un repère de chacun des axes de ces rotations.

Quel est l'angle de ces rotations ?

EXERCICE 2 **5 POINTS**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^{x}+2}\right).$$

1. Étudier le sens de variations de f.

2. **a.** Chercher la limite en $-\infty$ de f.

b. Démontrer que :

$$f(x) = x + \ln 2 + \ln \frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}.$$

En déduire la limite en $+\infty$ de f.

3. Montrer que la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f dans un plan rapporté au repère orthonormal $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité : 3 cm) admet la droite d'équation $y = x + \ln 2$ pour asymptote.

Vérifier que le point d'intersection des asymptotes appartient à $\mathscr{C}$. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à chacune des deux asymptotes.

Déterminer la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

PROBLÈME **9 POINTS**

On se propose l'étude pour n entier naturel non nul, des fonctions f_n définies sur $[0~;~+\infty[$ par

$$\left\{\begin{array}{l c l}
f_n(x) & = & x e^{-\frac{1}{nx}} \quad \text{si } x > 0\\
f_n(0) & = & 0.
\end{array}\right.$$

1. Étude des variations de f_n pour n entier naturel non nul.

a. Prouver que la fonction f_n est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. Étudier la dérivabilité de f_n en 0.

c. Calculer $f_n'(x)$ pour $x > 0$ et justifier que f_n est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Étude au voisinage de $+\infty$

a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

b. Donner le tableau de variations de la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(u) = \mathrm{e}^{-u} - (1-u).$$

En déduire que pour tout nombre réel $u \geqslant 0$

$$0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-u} \leqslant u \qquad (1)$$

c. Soit $t \geqslant 0$.
En intégrant sur l'intervalle $[0\,;\,t]$ l'encadrement (1), en déduire que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - (1-t) \leqslant \frac{t^2}{2}. \qquad (2)$$

d. Démontrer grâce à (2) que pour tout nombre réel $x > 0$

$$0 \leqslant f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{2n^2 x}$$

En déduire que la droite D_n d'équation $y = x - \dfrac{1}{n}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_n$ représentative de f_n.
Préciser la position relative de $\mathscr{C}_n$ et D_n.

3. Tracé de courbes.

a. Donner le tableau de variations de f_n.

b. Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$ et son asymptote en précisant la tangente en 0.

c. Démontrer que, pour tout $n > 0$, $\mathscr{C}_n$ est l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{n}$.
Construire $\mathscr{C}_2$ sur le même graphique que $\mathscr{C}_1$.