∽ Baccalauréat C Amérique centrale juin 1981 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \log \frac{x}{x+1}$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On prendra 2 cm comme unité.

1. Préciser l'ensemble de définition de f Démontrer que le point I de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ est centre de symétrie pour $\mathcal{C}$.
2. Étudier les variations de f et construire la courbe $\mathcal{C}$.
3. Calculer en cm^2 l'aire λ du domaine plan fini limité par la courbe $\mathcal{C}$, son asymptote oblique et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \lambda$, où λ est un réel supérieur ou égal à 1.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

$\mathbb{C}$ étant l'ensemble des nombres complexes, on considère la fonction polynôme P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$P(z) = \left(z^2 + 3z\right)^2 + (3z + 5)^2.$$

1. Factoriser $P(z)$ en deux polynômes du second degré à coefficients complexes.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$z^2 + 3(1 + \text{i})z + 5\text{i} = 0.$$

   En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $P(z) = 0$, puis montrer que $P(z)$ est le produit de deux polynômes du second degré, à coefficients réels.
3. *Application.* Montrer que quel que soit l'entier b supérieur ou égal à 6, si, dans la base b, l'entier A s'écrit $\overline{130}$, l'entier B s'écrit $\overline{35}$ alors l'entier $A^2 + B^2$ est le produit de deux nombres entiers dont l'écriture, dans la base b, est indépendante de b.

PROBLÈME **12 POINTS**

On considère un plan vectoriel euclidien E rapporté à une base orthonormée $B = \left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. On note $L(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans lui-même, $GL(E)$ le groupe linéaire de E et H l'ensemble des éléments v de E vérifiant
$f\left(\vec{v}\right) = \alpha\,\vec{v}$ avec f élément de $L(E)$, et α réel.
Le noyau de f est donc noté $\text{H}_{f,\,0}$ et $\text{H}_{f,\,1}$ est donc l'ensemble des vecteurs invariants par f.

Partie A

Soit g_0 l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base B est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que g_0 est un élément de $GL(E)$. Déterminer la matrice dans B de g_0^{-1}, application réciproque de g_0.
2. Soit s_0 la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur $\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath}$.
Déterminer la matrice de s_0 dans la base B.
3. On considère l'application linéaire $s_0' = g_0 \circ s_0 \circ g_0^{-1}$. Déterminer la nature et les éléments géométriques de s_0'.

Partie B

Dans cette partie du problème, g désigne un élément de $GL(E)$, g^{-1} son application réciproque et D et Δ deux droites distinctes de E.

1. Soit s la symétrie par rapport à D parallèlement à Δ. On considère l'application linéaire

$$s' = g \circ s \circ g^{-1}.$$

Démontrer que s' est la symétrie par rapport à g(D) parallèlement à $g(\Delta)$.
Retrouver à l'aide de ces résultats ceux de la question A 3.
2. Soit f un élément de $L(E)$. On considère l'application φ_g de $L(E)$ dans lui-même qui associe à f l'application linéaire $\varphi_g(f) = g \circ f \circ g^{-1}$.
   a. Préciser $\varphi_g(f)$ lorsque f est une homothétie,
   b. Démontrer que $\varphi_g(f)$ est une bijection de $L(E)$ sur lui-même et que

$$\varphi_g(f)\left(f_1 \circ f_2\right) = \varphi_g(f)\left(f_1\right) \circ \varphi_g(f)\left(f_2\right).$$

   c. Démontrer que, quel que soit le réel α, et quel que soit l'élément f de $L(E)$:

$$\mathrm{H}_{\varphi_g(f),\,\alpha} = g\left(\mathrm{H}_{f,\,\alpha}\right).$$

   d. Déterminer la nature et les éléments remarquables de $\varphi_g(f)$ lorsque f est la projection sur D faite parallèlement à Δ.
3. On suppose que g et f sont des isométries vectorielles.
   a. démontrer que $\varphi_g(f)$ est une isométrie vectorielle.
   b. f étant une rotation vectorielle, déterminer $\varphi_g(f)$ en fonction de f suivant la nature de g.

Partie C

On suppose maintenant que E est orienté et que la base B est directe. Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien associé à E et soit $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère de $\mathscr{P}$.
Si F est une application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, on note Inv_F l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ invariants par F.

1. Démontrer que, quelle que soit l'application affine bijective G de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ admettant G^{-1} comme application réciproque

$$\mathrm{Inv}_{G \circ F \circ G^{-1}} = G\left(\mathrm{Inv}_F\right).$$

2. On considère la rotation r de centre A$(0\,;\,1)$ et dont une mesure de l'angle est $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit D et Δ les droites de P d'équations respectives $y = x - 1$ et $y = 0$ dans le repère R.
On appelle s_1 la symétrie par rapport à D parallèlement à Δ et s_2 la symétrie orthogonale par rapport à D.
Déterminer la nature et les éléments remarquables de $r \circ s_1 \circ r^{-1}$ et de $s_2 \circ r \circ s_2$.