Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Amérique centrale juin 1982 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Pour tout n entier naturel, on considère

$$I_n = \int_1^n \text{Log}^n x \, \text{d}x.$$

1. Calculer I_0. À l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.
2. Montrer, par récurrence que l'on a

$$I_n = a_n \text{e} + b_n.$$

avec a_n terme général d'une suite a définie par $a_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel, par

$$a_{n+1} = 1 - a_n(n+1)\,;$$

b_n terme général d'une suite b définie par $b_0 = -1$ et, pour tout n entier naturel non nul, par

$$b_n = n!(-1)^{n-1}.$$

3. Déterminer le signe de I_n.
À l'aide du 1., montrer que l'on a

$$I_n \leqslant \frac{\text{e}}{n+1}.$$

Étudier le comportement de I_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 **4 points**

Un examen comporte deux épreuves obligatoires : une d'histoire et une d'économie. La question d'histoire est choisie au hasard parmi 30 sujets possibles et la question d'économie choisie au hasard parmi 20 sujets.
On suppose que tous les couples de questions possibles ont la même probabilité d'être obtenus.
Un candidat est reçu s'il connaît à la fois le sujet d'histoire et le sujet d'économie.

1. Un candidat se présente à cet examen en ignorant 6 sujets d'histoire et 5 sujets d'économie.
QueUe est la probabilité pour que le candidat soit reçu ?
2. Trois candidats se présentent à cet examen. Ils ignorent tous 6 sujets d'histoire et 5 sujets d'économie. On suppose que le résultat de l'examen pour les trois candidats sont des événements indépendants.
Soit X la variable aléatoire qui associe à cet examen le nombre des candidats reçus. Définir la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance mathématique de X et sa variance.

EXERCICE 2 **4 points**

Partie A

Soit E un plan vectoriel euclidien et $\text{B} = \left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ une base orthonormée de E. On considère l'application linéaire Φ_a de E dans E, admettant pour matrice dans la base B

$$M_a = \begin{pmatrix} a\sqrt{3} & 1-a \\ 1-a & -a\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

où a est un nombre réel.
Pour quelles valeurs de a, Φ_a est-elle involutive ?
Préciser dans chacun des cas la nature de l'endomorphisme et ses éléments caractéristiques.

Partie B

On considère un plan affine euclidien $\mathcal{E}$ associé à E et $\text{R} = \left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}$. Soit α et β deux nombres réels. On appelle $f_{\alpha,\,\beta}$ l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point M de coordonnées $(x~;~y)$ dans R, associe le point M' de coordonnées $\left(x', y'\right)$ dans R telles que

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{y}{2} + \alpha \\ y' & = & \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \beta \end{array}\right.$$

Soit $\text{O}' = f_{\alpha,\,\beta}(\text{O})$.

1. Déterminer l'ensemble des points O$'$ pour lesquels l'application $f_{\alpha,\,\beta}$ admet des points invariants.
2. On suppose $\alpha = 2-\sqrt{3}$ et $\beta = -1$. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $f_{2-\sqrt{3},\,-1}$. Quelle est l'image de la droite d'équation $x - y\sqrt{3} - 1 = 0$ par $f_{2-\sqrt{3},\,-1}$?
3. On suppose $\alpha = 4$ et $\beta = 0$. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{u}$ et la droite affine D de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ tels que

$$f_{4,\,0} = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_{\text{D}} = s_{\text{D}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$$

   où $t_{\overrightarrow{u}}$ représente la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et s_{D} la symétrie orthogonale par rapport à la droite D.
4. On considère la courbe C de $\mathcal{E}$ d'équation

$$x^2 + y^2 - 4x = 0.$$

   Définir la courbe C, en donner ses éléments caractéristiques et la construire dans R. Déterminer une équation de l'image C$'$ de C par $f_{4,\,0}$.
5. Soit z l'affixe du point M et z' l'affixe du point $M' = f_{4,\,0}(M)$. Trouver la relation existant entre z' et z.

Partie C

On considère l'application g de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point M de coordonnées $(x~;~y)$ dans $\mathbb{R}$, associe le point M'' de coordonnées $\left(x''~;~y''\right)$ dans $\mathbb{R}$, telles que

$$\left\{\begin{array}{l c l} x'' & = & x\sqrt{3} + y - 3 \\ y'' & = & x - y\sqrt{3} + 3. \end{array}\right.$$

1. Montrer que g admet un point invariant, et un seul. Soit Ω ce point.
2. Déterminer une homothétie h de centre Ω et une droite affine Δ contenant Ω telles que

$$g = s_{\Delta} \circ h = h \circ s_{\Delta}.$$

   où s_{Δ} est la symétrie orthogonale par rapport à Δ.