∽ Baccalauréat C Amérique centrale juin 1988 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. On considère l'ensemble (E) des points M de (P) de coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifiant l'équation

$$(1) \qquad 25\left(x^2+y^2\right)=(3x-16)^2.$$

1. En interprétant géométriquement l'équation (1) démontrer que (E) est une conique de foyer O et de directrice la droite (Δ) d'équation $x=\dfrac{16}{3}$. Donner la nature et l'excentricité de (E).
   Dans toute la suite de l'exercice, M désigne un point de (E) et θ une détermination de l'angle de vecteurs $\left(\vec{u},\,\overrightarrow{\mathrm{O}M}\right)$.
2. **a.** Déduire de l'équation (1) une relation du premier degré entre OM et l'abscisse x de M.
   b. Démontrer que $\mathrm{O}M=\dfrac{16}{5+3\cos\theta}$.
3. On suppose ici que θ appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
   La droite (OM) coupe (Δ) en I et recoupe (E) en un point M'.
   a. Démontrer que $\dfrac{1}{\mathrm{O}M}+\dfrac{1}{\mathrm{O}M'}$ est une constante indépendante de M.
   b. Démontrer que $\dfrac{1}{\mathrm{O}M}-\dfrac{1}{\mathrm{O}M'}=\dfrac{2}{\mathrm{O}I}$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On considère dans le plan orienté (P), deux points distincts A et B. Pour tout point M de (P), on appelle M' l'image de M dans la rotation r_{A} de centre A, d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ et M'' l'image de M dans la rotation r_{B} de centre B, d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

1. De l'étude de $r_{\mathrm{B}}\circ\left(r_{\mathrm{A}}\right)^{-1}$, déduire que pour tout point M de (P), le milieu de $[M'M'']$ est un point fixe J dont on démontrera qu'il appartient au cercle de diamètre [AB].
2. Le but de cette question est de déterminer l'ensemble des points M pour lesquels M, M', M'' sont alignés.
   a. Pour tout point M de (P) distinct de A et B, démontrer que
   $$\left(\overrightarrow{MM'},\,\overrightarrow{MM''}\right)=\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\,\overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)-\frac{\pi}{2}\quad\text{modulo } 2\pi.$$
   b. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que M, M', M'' soient alignés.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathrm{I}=[-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}.$$

1. **a.** Démontrer que pour tout t de I on a : t3

$$g'(t) = -\frac{t^3}{1+t}.$$

b. En déduire que pour tout t de I on a $\left|g'(t)\right| \leqslant 2|t|^3$.

c. Par application de l'inégalité des accroissements finis, déduire de ce qui précède que pour tout x de 1 on a $|g(x)| \leqslant 2x^4$ [on pourra distinguer deux cas suivant le signe de x].

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2} \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. En utilisant les encadrements obtenus au A., démontrer que la fonction f est dérivable en zéro et préciser une équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe $(\mathcal{C})$.
2. Soit h la fonction numérique définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{-x^2 - 2x}{1+x} + 2\ln(1+x).$$

a. Étudier le sens de variation de h (on ne demande pas d'étude aux bornes).

b. Préciser $h(0)$. En déduire le signe de $h(x)$ sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

3. Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $]-1\ ;\ O[\cup]0\ ;\ +\infty[$ et l'exprimer à l'aide de $h(x)$.
En déduire le sens de variation de f.
4. Étudier les limites de f en -1 et $+\infty$.
5. Construire avec soin la courbe $(\mathcal{C})$ en précisant ses asymptotes (on prendra 2 cm pour unité).

Partie C

1. **a.** Démontrer que, pour tout réel t positif ou nul, on a :

$$-t^2 \leqslant h'(t) \leqslant 0.$$

b. Pour tout réel x positif ou nul, en déduire par intégration, un encadrement de $h(x)$ et démontrer que $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{3}$.

2. Soit ϕ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $\phi(x) = f(x) - x$.
De l'étude des variations de ϕ, déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution réelle strictement positive notée a.
Vérifier que $a < 1$.

Partie D

1. On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Montrer par récurrence sur n, en utilisant le sens de variation de f, que cette suite est bien définie et que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

2. **a.** Démontrer, en appliquant à f l'inégalité des accroissements finis, que pour tout entier naturel n on a :

$$|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{3}\,|u_n - a|.$$

En déduire que :

$$|u_n - a| \leqslant \frac{1}{3^n}.$$

b. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

c. En déduire, en justifiant, une valeur de n pour laquelle u_n constitue une valeur approchée de a à 10^{-3} près. Préciser cette valeur approchée.