Baccalauréat ES Amérique du Nord juin 1995

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** Soit la fonction g définie dans l'intervalle [2,; 3] par :

$$g(x) = x\ln x + (4-x)\ln(4-x).$$

Calculer $g'(x)$, où g' désigne la fonction dérivée de g.

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale :

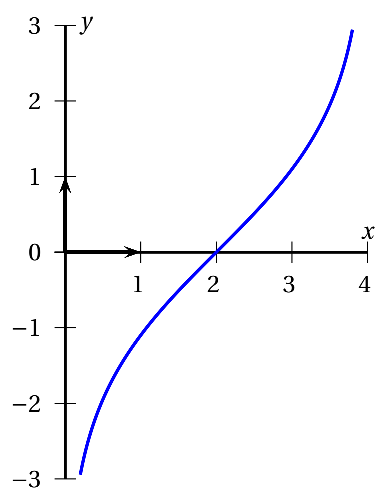
$$A = \int_2^3 \ln\frac{x}{4-x}\,\mathrm{d}x.$$

2. Soit f la fonction définie dans l'intervalle [2,; 3] par

$$f(x) = \ln\frac{x}{4-x}.$$

a. Montrer que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [2~;~3]$.

b.



Dans le tracé ci-dessus on a représenté la fonction f dans un plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 1 cm).

Déterminer l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe, les deux droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

EXERCICE 2 **6 points**

Enseignement obligatoire

Une pièce est usinée successivement par deux machines M_1 et M_2, les résultats des deux usinages étant **indépendants**.

Après passage dans la première machine M_1, 5 % des pièces présentent un défaut. On note A l'évènement : « la pièce est défectueuse après passage dans M_1 ». .

Après passage dans la deuxième machine M_2 (et quel que soit leur état après leur passage dans M_1), 2 % présentent un autre défaut.

On note B l'évènement : « la pièce est défectueuse après passage dans M_2 ».

On extrait au hasard une pièce parmi les pièces ayant subi les deux usinages.

1. Calculer les probabilités de A et de B.
   Exprimer à l'aide des évènements A et B les évènements suivants :
   C : « la pièce est défectueuse pour les deux usinages par M_1 et M_2 » ;
   D : « la pièce est défectueuse » ;
   E : « la pièce ne présente aucun défaut ».
   Calculer les probabilités des évènements C, D et E.
2. **a.** Sachant que la pièce extraite est défectueuse, quelle est la probabilité que la pièce présente des défauts d'usinage par les deux machines ? .

   b. Exprimer à l'aide de A et B l'évènement : « le défaut provient uniquement de la machine M_2 », puis sa probabilité.
   En déduire la probabilité que le défaut provienne uniquement de la machine M_2, sachant que la pièce est défectueuse.

EXERCICE 2 **6 points**
Enseignement de spécialité

Un constructeur de moteurs de « Formule 1 » fabrique des moteurs de compétition. La probabilité qu'un de ces moteurs soit exempt de défaut, et par suite ne « casse »pas lors d'un Grand Prix, est 0,8. On dira pour simplifier qu'un tel moteur est « bon » et on notera B l'évènement : « le moteur est bon ».
Avant chaque Grand Prix, un contrôle très sévère est effectué :
soit le moteur est déclaré utilisable, soit il est rejeté. On note U l'évènement : « le contrôle déclare le véhicule utilisable ».
Ce contrôle n'est pas infaillible :
— sachant qu'un moteur est bon. il est déclaré utilisable dans 95 % des cas ;
— sachant qu'un moteur a un défaut, il est rejeté dans 80 % des cas.
Notation : si E est un évènement, on notera $\overline{E}$ l'évènement contraire.

1. **a.** Calculer la probabilité des évènements suivants :
   V : « le moteur est bon et il est déclaré utilisable » ;
   W : « le moteur a un défaut et il est déclaré utilisable ».
   En déduire la probabilité de U.

   b. Montrer que la probabilité qu'un moteur soit bon sachant qu'il est déclaré utilisable est 0,95.
2. Au cours d'une saison (16 grands prix), ces moteurs sont montés après contrôle sur des voitures en course. On s'intéresse aux moteurs montés sur une voiture déterminée : ils sont changés à chaque compétition et l'on admet que les choix des moteurs sont indépendants les uns des autres.

   a. Quelle est la probabilité que les 16 moteurs soient « bons » ?

   b. Quelle est la probabilité que seulement 2 moteurs cassent ?

   c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs casse ?

   d. Quel est le nombre moyen de moteurs cassés auquel on peut s' attendre, au cours d'une saison ?

PROBLÈME **12 points**

On considère la fonction f définie pour tout x réel par :

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm). La courbe représentative de f dans ce plan est appelée $\mathscr{C}$.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 > \mathrm{e}^{-x}$.
   b. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.
   Déduire de a le sens de variation de f.
   c. Calculer la limite de f en $+\infty$.
   d. Déterminer la limite de f en $-\infty$. On pourra écrire
   $f(x) = (-x)\left(-1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{-x}\right)$.
   e. Dresser le tableau de variations de f.
2. **a.** Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\mathrm{e}^{-x} = 3$.
   Montrer que $\mathscr{C}$ admet une tangente T de coefficient directeur -2.
   Déterminer l'abscisse du point de contact A, son ordonnée, puis l'équation de T.
   c. Compléter le tableau suivant (on donnera les valeurs numériques arrondies à 10^{-2} près) :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$		1,72		1,37		3,05	

   d. Construire, dans le plan, les droites D et T, puis la courbe $\mathscr{C}$.
3. **a.** Sans faire de calcul de dérivée et en donnant les justifications nécessaires, établir le tableau des variations de $\dfrac{1}{f}$ à partir de celui de f.
   b. Sur la même figure que $\mathscr{C}$ mais en utilisant une autre couleur, construire la courbe représentative Γ de $\dfrac{1}{f}$.