Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Amérique du Nord avril 1975 ∾

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \longmapsto \mathrm{e}^{-|x|}.$$

1. f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
   Étudier en particularité en 0.
2. Étudier les variations de la fonction et tracer sa courbe représentative dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.
3. a étant un nombre réel strictement positif, calculer l'aire de la partie de plan définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} -a & \leqslant & x & \leqslant & a \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array}\right.$$

   Cette aire a-t-elle une limite quand a tend vers $+\infty$?

PROBLÈME

Soit P un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'axes Ox et Oy.

Première partie

1. Construire la courbe C d'équation

$$9x^2 + 16y^2 = 144.$$

   On précisera sa nature, son centre et ses sommets.
2. Soit h l'application de P dans P qui, au point M de coordonnées $(x ; y)$ fait correspondre le point M_1 de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & x \\ y_1 & = & \dfrac{4}{3}y \end{array}\right.$$

   Soit C_1 la transformée de C par la transformation h.
   Montrer que C_1 est un cercle de centre O.

Deuxième partie

1. Soit f_1 une application affine de P dans P, bijective et laissant C_1 globalement invariant.
   Démontrer que O est invariant par f_1.
2. Soit g_1 une application affine de P dans P bijective et laissant O invariant. On note $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice, dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, et l'application linéaire associée à g_1.
   Démontrer que, pour que g_1 laisse C_1 globalement invariant il faut et il suffit que l'on ait :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 + b^2 & = & 1 \\ c^2 + d^2 & = & 1 \\ ac + bd & = & 0 \end{array}\right.$$

3. Soit $\mathscr{E}_1$ l'ensemble des applications affines de P dans P, bijective et laissant C_1 globalement invariant.

Démontrer que $\mathscr{E}_1$ est le groupe des isométries laissant O invariant.

Troisième partie

On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des applications affines de P dans P, bijectives, laissant C globalement invariant.

1. h étant l'application définies dans la première partie, **2.**), démontrer que, si f appartient à $\mathscr{E}$, alors $h \circ f \circ h^{-1}$ appartient à $\mathscr{E}_1$ et que si f_1 appartient à $\mathscr{E}_1$ alors $h^{-1} \circ f_1 \circ h$ appartient à $\mathscr{E}$.

2. Démontrer que, si f est élément de $\mathscr{E}$, 0 est invariant par f et la matrice de l'application linéaire associée à f est de l'un des deux types suivants, où θ est un nombre réel

$$\text{type (1)} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\dfrac{4}{3}\sin\theta \\ \dfrac{3}{4}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\text{type (2)} \begin{pmatrix} \cos\theta & \dfrac{4}{3}\sin\theta \\ \dfrac{3}{4}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

3. a. Etudier l'ensemble des points invariants par f suivant que la matrice de l'application linéaire associée est du type (1) ou du type (2).

b. Déterminer les applications de $\mathscr{E}$ qui sont involutives.

Démontrer que, si une telle application n'est ni l'identité dans P, ni la symétrie par rapport à l'origine, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$, où M' désigne l'image de M, est élément d'une droite vectorielle du plan vectoriel associé à P.

Donner une base de cette droite vectorielle.

En déduire la nature de ces applications involutives.

c. Déterminer les applications de $\mathscr{E}$ qui sont des isométries et préciser leur nature géométrique.