Baccalauréat ES Amérique du Nord juin 1999

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une salle de spectacle propose, pour la saison, des abonnements pour 4, 5 ou 6 spectacles.
Dans la population des abonnés, la répartition est la suivante :

- 43,5 % ont choisi l'abonnement 4 spectacles,
- 33 % ont choisi l'abonnement 5 spectacles,
- le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles.

D'autre part, 65 % des abonnés sont des jeunes de moins de 25 ans, et dans cette population, la répartition est différente :

- 40 % ont choisi l'abonnement 4 spectacles,
- 40 % ont choisi l'abonnement 5 spectacles,
- le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles.

On interroge un abonné au hasard.

- On note A l'évènement « L'abonné interrogé a moins de 25 ans ». Ainsi la probabilité $p(\text{A})$ de cet évènement est 0,65.
- On note B l'évènement « L'abonné interrogé a choisi 5 spectacles ».
- Pour tout évènement V, on note $\overline{V}$ l'évènement contraire de V.

1. **a.** Quelle est la probabilité que l'abonné interrogé ait 25 ans ou plus ?

b. Sachant que l'abonné interrogé a moins de 25 ans, quelle est la probabilité qu'il ait choisi 5 spectacles ?

c. Décrire l'évènement $(A \cap B)$, et démontrer que la probabilité $p(A \cap B)$ est égale à $0,26$.

2. **a.** Démontrer que la probabilité $p\left(\overline{A} \cap B\right)$ est égale à $0,07$.

b. En déduire la probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé.

3. L'abonnement pour 4 spectacles coûte 50 euros, celui pour 5 spectacles coûte 60 euros, et celui pour 6 spectacles coûte 70 euros. On appelle X la variable aléatoire égale à la somme dépensée par l'abonné interrogé.

a. Donner la loi de probabilité de X en complétant :

x_i	50	60	70
$p(X = x_i)$			

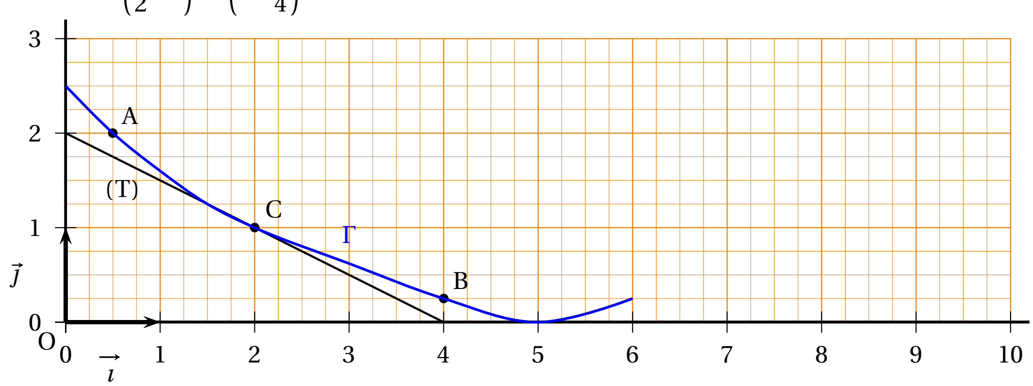
b. Calculer l'espérance de X.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

On donne, dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan, la courbe représentative (Γ) d'une fonction f, définie et dérivable sur $[0\,;\,6]$.

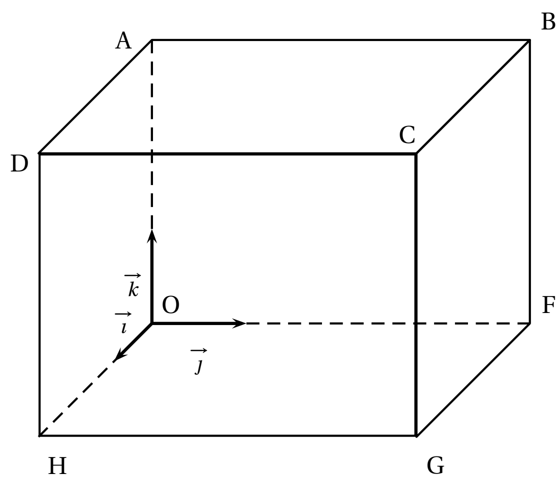
Les points $\text{A}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,2\right)$, $B\left(4\,;\,\dfrac{1}{4}\right)$ et $\text{C}(2\,;\,1)$ sont des points de (Γ), et (T) est la tangente à (Γ) en C.



1. **a.** Déterminer par lecture graphique le minimum et le maximum de f sur $[0\,;6]$.
   b. Déterminer par lecture graphique l'image par f de l'intervalle $[0\,;2]$.
   c. En utilisant le graphique, donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < \dfrac{1}{2}$.
2. **a.** On admet que (T) est parallèle à (AB). Déterminer alors $f'(2)$.
   b. Déterminer l'équation réduite de (T), et celle de (AB).
   c. Justifier à l'aide du graphique que, pour tout x de $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,4\right]$ on a :
$$-\frac{1}{2}x+2 \leqslant f(x) \leqslant -\frac{1}{2}x+\frac{9}{4}.$$
3. On pose $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{9} f(x)\,\mathrm{d}x$. Déduire du résultat précédent **2. c.** que l'intégrale I est comprise entre $\dfrac{49}{16}$ et $\dfrac{63}{16}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
ABCDOFGH est un pavé défini par $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 3\,\vec{\imath}$, $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = 4\,\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 3\,\vec{k}$.
Soit L le milieu de [CG].



1. On considère l'ensemble (Π) des points dont les coordonnées x, y et z vérifient : $4x-3y+8z-12=0$.
2. Parmi les points A, B, O, G, H, L lesquels appartiennent à (Π) ?
3. Justifier que l'ensemble (Π) est le plan (BLH).
4. Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (BLH).
5. Soit (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$. Montrer que (Δ) est l'ensemble des points M tels que $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NH}}=0\\ \text{et}\\ \overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BL}}=0.\end{array}\right.$ En déduire un système d'équations caractérisant la droite (Δ).
6. Montrer que le point de coordonnées $\left(-\dfrac{48}{89}\,;\dfrac{36}{89}\,;\dfrac{171}{89}\right)$ appartient à (Δ) et à (Π).

PROBLÈME **10 points**

Une entreprise envisage la fabrication d'un nouveau produit. Sa décision dépend des résultats de plusieurs études :
Étude de la demande pour ce nouveau produit : c'est l'objet de la partie A.
Étude d'un coût moyen de production : c'est l'objet de la partie B.

Partie A

Une étude a permis d'établir le tableau suivant où, pour différentes observations, x_i désigne la quantité de produit (en milliers d'unités) que la clientèle est disposée à acheter, et y_i le prix de vente (en francs) d'une unité :

x_i	1,5	3	5	8	11	12
y_i	120	110	100	90	80	70

Ainsi, pour que la clientèle soit disposée à acheter 5 000 unités, le prix de vente d'une unité doit être fixé à 100 F.

1. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique.
   Prendre 1 cm pour 1 millier d'unités en abscisse, et 1 cm pour 10 francs en ordonnée.
   Dans les questions suivantes, le détail des calculs statistiques n'est pas demandé ; les résultats seront donnés à 10^{-2} *près.*
2. Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique.
   Un ajustement affine est-il approprié ? justifier la réponse.
3. **a.** Donner une équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
   b. D'après ce modèle, comment faut-il fixer le prix de vente d'une unité si l'on veut pouvoir vendre un minimum de 6 500 unités ?
4. On admet que le prix de vente d'une unité, noté PV, est une fonction de la demande x (en milliers d'unités) définie, pour $x \in [2\,;\,15]$, par :
   $\text{PV}(x) = -4,33x + 124,2$.
   Représenter la fonction PV dans le repère utilisé dans la question 1.

Partie B

Le coût total de production (en francs) de x milliers d'unités est, pour $x \in [2\,;\,15]$:

$$\text{CT}(x) = 105\,[x + 4 - 3\ln(x)]$$

et le coût moyen de production d'une unité est, pour $x \in [2\,;\,15]$

$$\text{CM}(x) = \frac{\text{CT}(x)}{1\,000x}.$$

1. On note CM′ la dérivée de la fonction CM.
   Calculer $\text{CM}'(x)$ et démontrer que $\text{CM}'(x)$ a le même signe que $\ln(x) - \dfrac{7}{3}$ pour tout $x \in [2\,;\,15]$.
2. Résoudre sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $\ln(x) - \dfrac{7}{3} \geqslant 0$.
3. **a.** Étudier les variations de CM sur l'intervalle $[2\,;\,15]$.
   b. Tracer la représentation graphique de CM dans le repère utilisé dans la partie **A**.
   c. À l'aide du graphique, déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'entreprise peut faire un bénéfice. (On donnera la réponse sous forme d'un intervalle dont les bornes sont des entiers.)