Baccalauréat ES Amérique du Nord juin 1997

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des parfums haut de gamme, qui seront appelés par la suite des originaux.
Il existe sur le marché des contrefaçons qui seront appelées par la suite des copies. On sait que 0,5 % des flacons proposés à la vente sont des copies.
Pour éliminer ces copies, l'entreprise a mis au point un test optique per- mettant, sans rompre le ruban de garantie, de se faire une opinion concernant la conformité du produit.
On sait que :

- la probabilité que le test soit positif (c'est-à-dire qu'il indique qu'il s'agit d'une copie) sachant que le produit est une copie est $0,85$;
- la probabilité que le test soit négatif sachant que le produit est un original est $0,95$.

On tire un flacon au hasard et on le soumet au test.

1. Montrer que :
   a. la probabilité que le produit soit un original est égale à $0,995$.
   b. la probabilité que le test soit positif sachant que le produit est un original est égale à $0,05$.
2. Calculer la probabilité que :
   a. le produit soit une copie et que le test soit positif.
   b. le produit soit un original et que le test soit positif.
   c. le test soit positif.
   d. le produit soit un original sachant que le test est positif.
   e. le produit soit une copie sachant que le test est positif.
3. Exprimer brièvement votre opinion sur la fiabilité de ce test.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une étude statistique a montré qu'un archer de très bon niveau, tirant dans une cible à onze zones numérotées 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10, a atteint avec une flèche :

- la zone 10 avec une fréquence de $0,3$
- la zone 9 avec une fréquence de $0,6$
- la zone 8 avec une fréquence de $0,1$.

À chaque flèche tirée est associé un nombre de points égal au numéro de la zone atteinte. On admet que, pour cet archer se présentant à une compétition, les probabilités des évènements
« la flèche marque 10 »
« la flèche marque 9 »
« la flèche marque 8 »
sont respectivement égales aux fréquences observées et que les tirs sont indépendants les uns des autres.
On appelle volée deux tirs successifs d'une flèche.

1. Cet archer tire une volée. On associe à une volée la variable aléatoire X, somme des points marqués à chacun des deux tirs de la volée. On appelle volée réussie toute volée telle que $X \geqslant 19$.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ? Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Vérifier que la probabilité de l'évènement « $X \geqslant 19$ » est $\dfrac{9}{20}$.
   Calculer la probabilité de l'évènement « $17 \leqslant X \leqslant 19$ ».

c. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

2. Cet archer tire trois volées successives, que l'on suppose indépendantes. On considère la variable aléatoire Y, nombre de volées réussies parmi les trois tirées. Calculer la probabilité des évènements suivants :

a. « $Y = 2$ ».

b. « $Y \geqslant 1$ ».

3. Cet archer tire n volées successives, que l'on suppose indépendantes.
Quelle doit être la valeur minimale n_0 de n pour que la probabilité de l'évènement « une volée au moins est réussie » soit supérieure ou égale à 0,999 ?

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 - 1 + 2\ln x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son intervalle de définition.

2. étudier le sens de variation de g (le tracé de la courbe représentative de g n'est pas demandé).

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet le nombre réel 1 comme unique solution sur $]0~;~+\infty[$.

4. De l'étude précédente, déduire le signe de $g(x)$, en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}.$$

1. Montrer que, pour tout x appartenant à $]0~;~+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

3. Dresser le tableau de variation de f.

4. On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et Γ les courbes représentatives des fonctions f et ln dans un repère orthonormal, $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 4 cm).
étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Γ. Tracer Γ puis $\mathscr{C}_f$.

Partie C

On désigne par Δ le domaine représentant sur le graphique précédent l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient

$$\left\{\begin{array}{l c c c l}1 & \leqslant & x & \leqslant & 4\\ f(x) & \leqslant & y & \leqslant & \ln x.\end{array}\right.$$

On note $\mathscr{A}(\Delta)$ l'aire, en cm^2, de Δ.

1. Hachurer Δ sur le graphique précédent.
Exprimer $\mathscr{A}(\Delta)$ sous forme d'une intégrale (le calcul n'est pas demandé).

2. a. On considère la fonction h, définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{1 + \ln x}{x}.$$

Calculer $h'(x)$. En déduire une primitive, sur $]0~;~+\infty[$ de la fonction qui, à x associe $\dfrac{\ln x}{x^2}$.

b. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}(\Delta)$. En donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.