Baccalauréat ES Amérique du Nord juin 1998

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Aucun détail des calculs statistiques à effectuer à la machine n'est demandé dans cet exercice.

Dans une région imaginaire sévit depuis quelques années une mystérieuse maladie : toute personne atteinte est, pendant plusieurs mois, plongée dans un profond sommeil.

Le tableau ci-dessous concerne la population de cette région.

Il indique, au 1er janvier de chaque année :

— l'année, variable x (l'année 1992 a été notée 92 et ainsi de suite jusqu'à l'année 1998 notée 98) ;

— le nombre de personnes atteintes, variable z.

Année x_i	92	93	94	95	96	97	98
Nombre de personnes atteintes, z_i	45 400	49 100	52 300	50 400	52 600	53 900	55 000

1. Déterminer la valeur décimale arrondie au dixième du coefficient de corrélation linéaire entre x et z.

   Ce résultat permet-il d'envisager un ajustement affine entre les variables x et z?

2. Représenter le nuage de points associé à la série $(x\,;\,z)$. Unités : en abscisse, 91 est l'origine des années et 1 cm représente une année ; en ordonnée, 40 000 est l'origine et 5 cm représentent 10 000 personnes.

3. **a.** Donner une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés. Pour les coefficients, on prendra les valeurs décimales arrondies au dixième.

   Tracer cette droite sur le graphique précédent.

   b. En supposant que l'évolution de la maladie se poursuive de la même façon au cours de l'année 1998, donner une estimation de la population atteinte par cette maladie le 1er janvier 1999.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le tableau suivant donne le montant des cotisations qu'ont eu à payer en 1997 les adhérents à une médiathèque, selon la catégorie à laquelle ils appartiennent :

Adhérents	Catégories	Cotisation
Résidents	Catégorie A : scolaires	gratuit
	Catégorie B : étudiants	60 F
	Catégorie C : autres	100 F
Non résidents	Catégorie D	140 F

La recette totale de la médiathèque se compose :

— d'une subvention municipale ;

— des cotisations des adhérents.

1. En 1997 :

   — la subvention municipale a été de 200 000 F ;

   — il y a eu au total 5 000 adhérents, dont 72 % de résidents ; parmi les résidents, 45 % appartiennent à la catégorie A et 30 % à la catégorie B.

   a. Combien y a-t-il eu d'adhérents dans chaque catégorie ?

   b. Quelle a été la recette totale ?

2. En 1998 :
   — pour équilibrer le budget, la recette totale doit augmenter de 10 % ;
   — la subvention municipale est augmentée de 3 %.

   a. Montrer que, pour équilibrer le budget, la part de la recette totale provenant des cotisations en 1998 doit être égale à 399 880 F.

   b. Le nombre d'adhérents augmente en 1998 de 10 % dans chaque catégorie. On modifie uniquement les cotisations des catégories C et D ; la cotisation de la catégorie C passe à 105 F. Calculer, à 10 F près par excès, la cotisation minimale de la catégorie D, pour que la part de la recette provenant des cotisations en 1998 soit au moins de 399 880 F.

   c. Calculer dans ces conditions les pourcentages d'augmentation des cotisations des catégories C et D entre 1997 et 1998.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Un lycée compte 660 élèves.
La fréquentation mensuelle du CDI (Centre de Documentation et d'Information) suivant les niveaux est donnée par le tableau suivant :

Niveaux	Seconde			Première				Terminale			
Nombre de visites mensuelles	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3
Effectifs	56	140	84	10	60	70	60	18	70	38	54

(Par exemple, 84 élèves de seconde sont venus au CDI 2 fois par mois).

1. On interroge un élève choisi par hasard et on considère les évènements suivants :
   — A « l'élève est en seconde » ;
   — B « l'élève vient une fois par mois au CDI » ;
   — C « l'élève est en seconde et vient une fois par mois au CDI ».

   a. Calculer la probabilité $p(A)$ de l'évènement A.

   b. Montrer que $p(B) = \dfrac{9}{22}$.

   c. Calculer $p(C)$.

   d. L'élève choisi au hasard est l'un de ceux qui viennent une fois par mois au CDI. Quelle est la probabilité qu'il soit en seconde ? (Donner le résultat sous forme de fraction irréductible).

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de visites mensuelles au CDI d'un élève du lycée.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X.

   c. On répète dix fois, de façon indépendante le choix au hasard d'un élève parmi les élèves du lycée.
   Quelle est la probabilité que, parmi les élèves choisis, cinq élèves exactement se rendent une fois par mois au CDI ? (Donner le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-3}).

PROBLÈME **10 points**

Les objectifs de ce problème sont de déterminer une fonction qui ajuste de manière satisfaisante une série statistique (parties A et B), puis d'étudier un coût moyen résultant de l'étude précédente (partie C). Une entreprise a noté les valeurs du coût total de production d'un engrais, notées $\text{CT}(x)$, en fonction de la masse x produite (où x est exprimée en tonnes et $\text{CT}(x)$ est exprimé en milliers de francs) :

x	10	12	14	16	18
$\text{CT}(x)$	100	110	145	196	308

Partie A

Sur une feuille de papier millimétré, reporter les cinq points de coordonnées $(x\ ;\ \text{CT}(x))$ dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Unités : 1 cm pour une tonne sur l'axe des abscisses ; 0,05 cm pour un millier de francs sur l'axe des ordonnées.

Partie B

On recherche une fonction, définie sur l'intervalle $[10\,;\,18]$, dont la courbe représentative dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ s'ajuste de façon acceptable avec les cinq points tracés sur le graphique.
Une fonction f est déclarée « acceptée » si, pour chacune des cinq valeurs de x citées dans le tableau, on a $-10 \leqslant f(x) - \text{CT}(x) \leqslant 10$.

1. On essaie la fonction g, définie sur l'intervalle $[10\,;\,18]$ par

$$g(x) = 3,25(x-10)^2 + 100.$$

a. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	10	12	14	16	18
$g(x)$	100				308
$g(x) - \text{CT}(x)$					

b. Pourquoi g n'est-elle pas « acceptée » ?

2. On essaie la fonction h, définie sur l'intervalle $[10\,;\,18]$ par : $h(x) = \text{e}^{0,3x} + 80$.

a. Montrer que la fonction h est « acceptée ».

b. Étudier le sens de variation de h sur l'intervalle $[10\,;\,18]$.

c. Tracer la courbe représentative de h sur le graphique de la partie **A**.

Partie C

Dans cette partie, on utilise sur l'intervalle $[10\,;\,18]$ la fonction h, « acceptée », de la partie **B**. Ainsi, le coût moyen de production d'une tonne, en fonction de la masse x produite, est, en milliers de francs

$$\text{CM}(x) = \frac{h(x)}{x} = \frac{\text{e}^{0,3x} + 80}{x}.$$

1. On note CM' la dérivée de la fonction CM.

a. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[10\,;\,18]$, $\text{CM}'(x)$ a le même signe que $s(x) = (0,3x-1)\text{e}^{0,3x} - 80$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $[10\,;\,18]$.

c. Montrer que l'équation $s(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[10\,;\,18]$. On note α cette solution et, pour la suite, on prendra $\alpha = 11,59$.

2. a. Déduire de ce qui précède le sens de variation de CM sur l'intervalle $[10\,;\,18]$.

b. Pour quelle production a-t-on un coût moyen minimal ? Quel est ce coût, à un franc près par excès ?