Baccalauréat S Amérique du Nord juin 2002

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice comporte deux parties qui peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie I

1. Dans un questionnaire à choix multiple (Q. C. M.), pour une question donnée, 3 réponses sont proposées dont une seule est exacte.

   Un candidat décide de répondre au hasard à cette question.

   La réponse exacte rapporte n point(s) et une réponse fausse fait perdre p point(s).

   Soit N la variable aléatoire qui associe, à la réponse donnée par le candidat, la note algébrique qui lui sera attribuée pour cette question.

   a. Donner la loi de probabilité de N.

   b. Quelle relation doit exister entre n et p pour que l'espérance mathématique de N soit nulle ?

2. À un concours un candidat doit répondre à un Q. C. M. de 4 questions comportant chacune trois propositions de réponse dont une seule est exacte. On suppose qu'il répond à chaque question, au hasard. Calculer la probabilité qu'il réponde correctement à 3 questions exactement (donner cette probabilité sous forme de fraction irréductible puis sa valeur arrondie au centième).

Partie II

Répondre au Q. C. M. proposé sur la feuille annexe (à rendre avec la copie).

Document à rendre avec la copie

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Il est seulement demandé d'entourer la réponse choisie pour chacune des quatre questions.
L'absence de réponse à une question ne sera pas pénalisée.

a. On dispose de dix jetons numérotés de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour former un « paquet ». Combien de « paquets » contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi former ?

Réponse 1 : 180	Réponse 2 : 330	Réponse 3 : 110

b. A et B sont deux évènements d'un espace probabilisé tels que :

$$p(\text{A}) = 0,4 \quad p(\text{B}) = 0,5 \quad p(\overline{\text{A} \cup \text{B}}) = 0,35.$$

Combien vaut $p(\text{A} \cap \text{B})$?

Réponse 1 : $p(\text{A} \cap \text{B}) = 0,1$	Réponse 2 : $p(\text{A} \cap \text{B}) = 0,25$	Réponse 3 : Les données sont insuffisantes pour répondre.

c. A et B sont deux évènements d'un espace probabilisé tels que
$p(\text{B} \cap \text{A}) = \dfrac{1}{6}$, $p_{\text{A}}(\text{B}) = 0,25$ (probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé). Combien vaut $p(\text{A})$?

Réponse 1 : $p(\text{A}) = \dfrac{2}{3}$	Réponse 2 : $p(\text{A}) = \dfrac{1}{24}$	Réponse 3 : $p(\text{A}) = \dfrac{1}{12}$

d. Une variable aléatoire X a pour loi de probabilité :

x_i	1	2	4
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Combien vaut l'écart type de X ?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
$\sigma = \frac{3}{2}$	$\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sigma = 2$

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère l'application F du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1+\text{i})z + 2.$$

1. Soit A le point d'affixe $-2+2\text{i}$.

Déterminer les affixes des points A$'$ et B vérifiant respectivement A$' = F(\text{A})$ et $F(\text{B}) = \text{A}$.

2. Méthode de construction de l'image de M.

a. Montrer qu'il existe un point confondu avec son image. On notera Ω ce point et ω son affixe.

b. Établir que pour tout complexe z distinct de ω, $\dfrac{z'-z}{\omega - z} = -\text{i}$.

Soit M un point distinct de Ω.

Comparer MM' et $M\Omega$ et déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'})$.

En déduire une méthode de construction de M' à partir de M.

3. Étude de l'image d'un ensemble de points.

a. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ, des points du plan dont l'affixe z vérifie $|z+2-2\text{i}| = \sqrt{2}$.

Vérifier que B est un point de Γ.

b. Démontrer que, pour tout z élément de $\mathbb{C}$

$$z'+2 = (1+\text{i})(z+2-2\text{i}).$$

Démontrer que l'image par F de tout point de Γ appartient au cercle Γ‘ de centre A$'$ et de rayon 2.

Placer O, A, B, A$'$, Γ et Γ' sur une même figure.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque.

Exemples d'éléments de (E) : 2 002 ; 3 773 ; 9 119. Les parties A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A : Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.

1. a. Décomposer 1 001 en produit de facteurs premiers.

b. Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.

2. **a.** Quel est le nombre d'éléments de (E) ?

b. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?

3. Soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme $\overline{abba}$.

a. Montrer que : « n est divisible par 3 » équivaut à « $a+b$ est divisible par 3 ».

b. Montrer que : « n est divisible par 7 » équivaut à « b est divisible par 7 ».

4. Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

Partie B : Étude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile.

Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile.
On admet que pour tout élément n de (F), il existe des entiers naturels p et q tels que :

$$n = 2\,000 + 4p \quad \text{et} \quad n = 2\,002 + 11q.$$

1. On considère l'équation (e) : $4p - 11q = 2$ où p et q sont des entiers relatifs.
Vérifier que le couple $(6, 2)$ est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e).

2. En déduire que tout entier n de (F) peut s'écrire sous la forme $2\,024 + 44\,k$ où k est un entier relatif.

3. À l'aide de la calculatrice déterminer les six plus petits éléments de (F).
N. B. : Liste des nombres premiers inférieurs à 40 :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37.

PROBLÈME **10 points**
Commun à tous les candidats

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f_k(x) = \ln(\text{e}^x + kx) - x.$$

Soit $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Étude préliminaire : mise en place d'une inégalité.

On considère la fonction g définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

1. Étudier le sens de variation de g.

2. En déduire que pour tout réel a positif ou nul $\ln(1+a) \leqslant a$.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f_1(x) = \ln(\text{e}^x + x) - x$.

1. Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1.

2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{\text{e}^x}\right)$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

3. Dresser le tableau de variation de f_1.

Partie B : Étude et propriétés des fonctions f_k.

1. Calculer $f_k(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$
   $f_k(x) = \ln\left(1 + k\dfrac{x}{\text{e}^x}\right)$. En déduire la limite de f_k, en $+\infty$.
3. **a.** Dresser le tableau de variation de f_k.

   b. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, on a $f_k(x) \leqslant \dfrac{k}{\text{e}}$.
4. Déterminer une équation de la tangente T_k à $\mathscr{C}_k$ au point O.
5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$.
   Étudier la position relative de $\mathscr{C}_p$ et $\mathscr{C}_m$.
6. Tracer les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en O.

Partie C : Majoration d'une intégrale.

Soit λ un réel strictement positif, on note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_k$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.

1. Sans calculer $\mathscr{A}(\lambda)$, montrer que $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant k\displaystyle\int_0^{\lambda} x\text{e}^{-x}\,\text{d}x$ (on pourra utiliser le résultat de la question préliminaire).
2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\lambda} x\text{e}^{-x}\,\text{d}x$.
3. On admet que $\mathscr{A}(\lambda)$ admet une limite en $+\infty$.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda) \leqslant k$.
   Interpréter graphiquement ce résultat