Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Nord juin 1997

EXERCICE 1 **4 points**

Juliette débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie. On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est 0,6, et si elle perd une partie, la probabilité pour qu'elle perde la partie suivante est 0,7. On note, pour n entier naturel ou nul :
G_n l'évènement « Juliette gagne la n-ième partie »
P_n l'évènement « Juliette perd la n-ième partie »

1. **a.** Déterminer les probabilités $p(G_1)$, $p(G_2/G_1)$ et $p(G_2/P_1)$. En déduire la probabilité $p(G_2)$.
   b. Calculer $p(P_2)$.
2. On pose, pour n entier naturel non nul, $x_n = p(G_n)$ et $y_n = p(P_n)$.
   a. Déterminer pour n entier naturel non nul les probabilités $p(P_{n+1}/G_n)$ et $p(G_{n+1}/P_n)$.
   b. Montrer que pour tout n entier naturel non nul :
$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{array}\right.$$
3. Pour n entier naturel non nul, on pose
$$v_n = x_n + y_n \text{ et } w_n = 4x_n - 3y_n$$
   a. Montrer que la suite (v_n) est constante de terme général égal à 1.
   b. Montrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.
4. **a.** Déduire du 3. l'expression de x_n en fonction de n.
   b. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, ABC est un triangle rectangle en A, direct, non isocèle. H est le pied de la hauteur issue de A. Le point D est tel que ACD est un triangle rectangle en A, isocèle et direct. O est le pied de la hauteur issue de D dans le triangle OBC. K est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle DAO.

1. Faire une figure.
2. Montrer que la rotation r de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ transforme la droite (CB) en la droite (DO), puis le triangle AHC en le triangle AKD. En déduire que AHOK est un carré.
3. Montrer que les droites (AB) et (KH) sont sécantes. (On pourra montrer que l'hypothèse « (AB) et (KH) parallèles » conduit à l'égalité « AO = AD » et que ceci est contradictoire avec les hypothèses de l'énoncé).
4. En déduire qu'il existe une homothétie h qui transforme le triangle AKD en le triangle BHA.
5. On considère la transformation composée $s = h \circ r$.
   a. Déterminer l'image des points H, C et A par s.
   b. Identifier cette transformation et donner ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 2y' + 5y = 2x + 3.$$

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ soit solution de cette équation.
2. Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que g vérifie (E) si et seulement si $g - f$ vérifie l'équation

$$(\mathrm{E}') : \quad y'' + 2y' + 5y = 0.$$

3. Résoudre (E′) et en déduire la solution générale de (E).
4. Déterminer la fonction numérique h, solution particulière de (E) vérifiant les conditions initiales $h(0) = 1$ et $h'(0) = 1$.

Problème **11 points**

La partie D est indépendante des parties B et C.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité 3 cm).
On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right).$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Justifier que, pour tout x réel, $x^2 - 2x + 2 > 0$.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Représenter $(\mathscr{C})$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$: on montrera que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$ et on placera les points d'abscisse 0 et 2 ainsi que les tangentes à la courbe en ces points.

Partie B

On s'intéresse à l'intersection de $(\mathscr{C})$ et de (Δ).
On pose, pour tout réel x, $\quad \varphi(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la fonction dérivée $\varphi"(x)$ de $\varphi(x)$. En déduire que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** Déterminer la limite de φ en $-\infty$.

   b. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\varphi(x) = x\left[\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1\right]$$

   En déduire la limite de φ en $+\infty$.

Partie C

On pose J = [0,3 ; 0,4].

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto x^2 - 2x + 2$ est décroissante sur J. En déduire que si x appartient à J alors $f(x)$ appartient à J.
2. **a.** Prouver que pour tout x de J, $\left|f'(x)\right| \leqslant 0,95$ (on pourra montrer que f' est croissante sur J).
   b. En déduire que pour tout x de J, $|f(x) - \alpha| \leqslant 0,95|x - \alpha|$.
3. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 0,3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

   a. Prouver que pour tout n :
   - $u_n \in \mathrm{J}$
   - $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,95\,|u_n - \alpha|$
   - $|u_n - \alpha| \leqslant 0,1 \times (0,95)^n$.

   En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

   b. Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0, $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$.

Partie D

On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire du domaine compris entre les droites d'équation $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$. On se propose de déterminer une valeur approchée de $\mathscr{A}$ en unités d'aire.

1. Montrer que la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{4}$ a pour équation $y = -\dfrac{24}{25}x + \dfrac{6}{25} + \ln\dfrac{25}{16}$.
2. Soient les points E d'abscisse 0 et F d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ de la courbe $\mathscr{C}$.

   Montrer que la droite (EF) a pour équation $y = 2\left(\ln\dfrac{5}{8}\right)x + \ln 2$.
3. On admet que sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de (T) et en dessous de (EF).

   a. Montrer que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{24}{25} + \frac{6}{25} + \ln\frac{25}{16}\right) \mathrm{d}x \leqslant \mathscr{A} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2\left(\ln\frac{5}{8}\right)x + \ln 2\right) \mathrm{d}x.$$

   b. En déduire que $\ln\dfrac{5}{4} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{5}{2}$.

   Donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ à $5 \cdot 10^{-3}$ près.