∽ Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1978 ∾

EXERCICE 1

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 3^{670} par 11 ?
2. Quel est le reste de la division euclidienne de 3^{670} par 61 ?
3. Quel est le reste de la division euclidienne de 3^{671} par 671 ?

EXERCICE 2

Dans un espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ on considère l'application f, qui, à un point M de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ fait correspondre le point M_1 de coordonnées $\left(x_1~;~y_1~;~z_1\right)$ où :

$$\begin{array}{rcl}
x_1 &=& \dfrac{1}{3}(-2x-2y+z+2)\\
y_1 &=& \dfrac{1}{3}(-2x+y-2z+3)\\
z_1 &=& \dfrac{1}{3}(x-2y-2z+4)
\end{array}$$

Montrer que f est la symétrie orthogonale par rapport à une droite que l'on déterminera.

PROBLÈME

Le plan affine euclidien orienté (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie I

1. **a.** Soit A le point d'affixe $(3+\text{i})$ et B le point d'affixe 6 . Pour tout réel u, on considère les deux points M_u d'affixe $3-\sin u+\text{i}\cos u$ et N_u d'affixe $3(1+\cos u)+3\text{i}\sin u$.
   Montrer qu'il existe une unique similitude directe T_u telle que

   $$T_u(\text{A}) = M_u \quad \text{et } T_u(\text{B}) = N_u.$$

   b. Déterminer les éléments géométriques de T_u.

   c. Soit $\text{E} = \{T_u,~u \in \mathbb{R}\}$.
   Démontrer que $(\text{E},~\circ)$ est un groupe commutatif.
2. On pose $\text{B}_0 = \text{B}$, $\text{B}_1 = T_{\frac{\pi}{2}}(\text{B})$, $\text{B}_2 = T_{\frac{\pi}{2^2}}(\text{B}_1), \ldots$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\text{B}_n = T_{\frac{\pi}{2^n}}(\text{B}_{n-1})$.
   Calculer en fonction de n les coordonnées de B_n.
   Quelle est la position limite du point B_n quand n tend vers $+\infty$?

Partie II

Soit (C) le sous-ensemble de (P) d'équation

$$\left(y^2-8y+15\right)\text{e}^{y-3}+3-x=0$$

et soit (C_1) l'image de (C) par $T_{\frac{\pi}{2}}$.

1. Montrer que (C_1) a pour équation

$$y = \left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Soit f la fonction définie pour tout x réel par

$$f(x) = \left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Étudier le comportement de $x^2\mathrm{e}^{-x}$ quand x tend vers $+\infty$. (on pourra utiliser Log $\left(x^2\mathrm{e}^{-x}\right)$.

b. Étudier la fonction f.

Construire (C_1) dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On donne $\exp\left(\sqrt{2}\right) \approx 4,1$.

En déduire la construction de (C) dans le même repère.

3. a. Calculer $\displaystyle\int_0^x \left(t^2 + 2t\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ en intégrant par parties.

b. Soit m un nombre réel positif. Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre (C) et les droites d'équation $x = 3,~y = 5,~y = 3 - m$.

Cette aire a-t-elle une limite quand m tend vers $+\infty$?