∽ Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2004 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Le tableau suivant donne les indices des prix à la consommation pour les années 1990 à 1997.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Indice y_i	100	103,2	105,7	107,9	109,7	111,6	113,8	115,2

Source Insee

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal (2 cm représente une année en abscisse et 1 cm représente un point d'indice en ordonnée; faire débuter la graduation à 100 sur l'axe des ordonnées).

   Calculer les coordonnées du point moyen et placer ce point.
2. À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement affine D par la méthode de moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-1} près). Représenter la droite D dans le repère précédent.
3. On envisage l'ajustement du nuage par une branche de parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, et l 'on cherche les trois nombres a, b et c. Pour cela on pose $z_i = \sqrt{1198 - 10y_i}$.

   Une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés est alors : $z = -x + 14$.

   a. Vérifier que $y = -0,1x^2 + 2,8x + 100,2$.

   b. Dans le repère précédent, et sans étudier la fonction correspondante, tracer la branche de parabole d'équation $y = -0,1x^2 + 2,8x + 100,2$ pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,7]$.

   c. En choisissant ce dernier ajustement, quelle prévision de l'indice des prix à la consommation pouvait-on faire fin 1997 pour 1998?

   d. On sait aujourd'hui que l'indice des prix à la consommation en 1998 était de 116. Calculer le pourcentage de l'erreur commise en utilisant la prévision trouvée en **3. c.**.

Exercice 2 **5 points**
(pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Un magasin vend des salons de jardin.
Une enquête statistique a montré que :

- 10 % des personnes qui entrent dans le magasin achètent une table;
- parmi les personnes qui achètent une table, 80 % achètent un lot de chaises;
- parmi les personnes qui n'achètent pas de table, 10 % achètent un lot de chaises.

Une personne entre dans le magasin.
On note T l'évènement : « La personne achète une table »
On note C l'évènement : « La personne achète un lot de chaises »

1. Traduire à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau la situation décrite ci-dessus.
2. **a.** Montrer que la probabilité que la personne achète un lot de chaises est égale à 0,17.

   b. Quelle est la probabilité que la personne n'achète pas de table sachant qu'elle a acheté un lot de chaises?
3. À la fin de la journée, le directeur du magasin constate qu'il a réalisé en moyenne un bénéfice de 11,80 € par personne entrant dans le magasin.

   On sait que le directeur a fait un bénéfice de 50 € par table vendue.

   On appelle x le bénéfice exprimé en euros qu'il a réalisé par lot de chaises vendues. On se propose de calculer x.

a. Reproduire et compléter le tableau suivant définissant la loi de probabilité « montant du bénéfice réalisé par personne entrant dans le magasin ».

Montant du bénéfice	0	50	x	$50+x$
Probabilité				

b. Montrer que l'espérance mathématique de cette loi est égale à $5+0,17x$.

c. Conclure.

EXERCICE 2 **5 points**
(pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

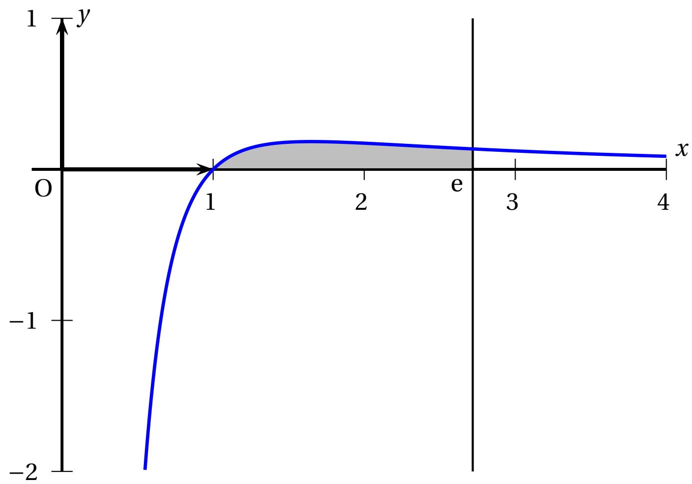
Au cours de la première semaine de l'année scolaire, un professeur propose aux élèves de sa classe le choix entre deux sorties pédagogiques une sortie A et une sortie B.
20 % des élèves de la classe sont favorables à la sortie A et tous les autres élèves sont favorables à la sortie B.
Les arguments des uns et des autres font évoluer cette répartition en cours d'année.
Ainsi 30 % des élèves favorables à la sortie A et 20 % des élèves favorables à la sortie B changent d'avis la semaine suivante.
On note :
a_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la semaine n ;
b_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie B la semaine n ;
P_n la matrice $(a_n\ ;\ b_n)$ traduisant l'état probabiliste la semaine n.

1. Déterminer l'état initial P_1.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
3. En déduire que $P_{n+1} = P_n \times \mathrm{M}$ où M est la matrice $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$
4. Déterminer l'état probabiliste P_3 et en déduire la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la troisième semaine.
5. Déterminer le réel x tel que $(x\ ;\ 1-x) \times \mathrm{M} = (x\ ;\ 1-x)$.
   On admet que la suite (a_n) est croissante. La sortie A finira-t-elle par être préférée à la sortie B ?

EXERCICE 3 **6 points**

La figure ci-dessous représente la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

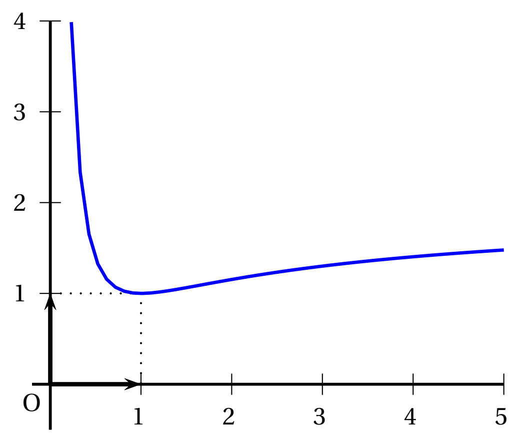


Graphique n° 1

1. **a.** Démontrer que la fonction présente un maximum en $x = \sqrt{\mathrm{e}}$ et qu'il vaut $\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

   b. Donner le signe de $f(x)$ sur $]0~;~+\infty[$.

2. Une primitive F de la fonction f est représentée ci-dessous :



Graphique n° 2

Elle vérifie de plus $F(\mathrm{e}) = \frac{2\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$, $F\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = 2 - \frac{3}{2\sqrt{\mathrm{e}}}$.

a. Les variations de la fonction F semblent-elles cohérentes avec le résultat de la question **1. b.** ? Justifier votre réponse.

b. Donner, en le justifiant le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant F au point d'abscisse $\sqrt{\mathrm{e}}$.

c. Exprimer, en unités d'aire, l'aire de la partie grisée sur le graphique n° 1.

d. La fonction G définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $G(x) = \frac{-1-\ln x}{x}$ est une primitive de la fonction f.
Exprimer $F(x)$ en fonction de x, pour $x \in]0~;~+\infty[$.

EXERCICE 4 **4 points**

Soit f la fonction de la variable réelle définie sur $[0\,;\,10]$ par

$$f(x) = \frac{90}{2 + \mathrm{e}^{-x}}.$$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,10]$.
2. Calculer $f(0)$ et $f(10)$.
3. Déduire des questions précédentes que l'équation $f(x) = 44$ admet exactement une solution dans l'intervalle $[0\,;\,10]$. Donner un encadrement de cette solution par deux entiers consécutifs.
4. **a.** Vérifier que $f(x) = 45\dfrac{2\mathrm{e}^{x}}{2\mathrm{e}^{x}+1}$ et en déduire une primitive de f sur $[0\,;\,10]$.

   b. Montrer que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 45\ln\left(\frac{2\mathrm{e}^2+1}{3}\right)$.
5. Soit g la fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{90}{2+\mathrm{e}^{-x}}$.

   La fonction g peut modéliser l'évolution des exportations d'une entreprise, x étant le temps écoulé en années depuis le 01/01/2000 et $g(x)$ étant le montant des exportations en millions d'euros de l'année correspondante.

   a. Quel est le montant des exportations de l'entreprise au 01/01/2000 ?

   b. En quelle année les exportations dépasseront-elles 44 millions d'euros ?

   L'entreprise peut-elle espérer que ses exportations dépasseront 45 millions d'euros sur l'une des onze années 2000 à 2010 ?