Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 1998

EXERCICE 1 **5 points**

I. Le tableau ci-dessous indique les pourcentages d'accès au niveau baccalauréat d'une génération d'élèves.

Année x_i	1980	1982	1984	1986	1988	1990	1992	1994
Taux d'accès au niveau baccalauréat y_i	34 %	37,5 %	35,8 %	39,8 %	46,3 %	56,1 %	62,5 %	70,7 %

Source : d'après un document du Ministère de l'éducation nationale

N. B. *Les calculs statistiques seront effectués à la machine, aucun détail n'est demandé dans cette partie.*

1. **a.** Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i~;~y_i)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal :
   - sur l'axe des abscisses on placera 1980 à l'origine et on choisira 1 cm pour une année ;
   - sur l'axe des ordonnées on placera 30 à l'origine et on choisira 1 cm pour 2 %.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série double et placer ce point sur le graphique précédent.
2. **a.** Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Peut-on envisager un ajustement affine ?

   b. Déterminer une équation de la droite de régression D de y en x : on prendra la valeur approchée à trois décimales par défaut pour le coefficient directeur de la droite et l'arrondi à l'unité pour l'autre coefficient.

   c. Tracer la droite D sur le graphique de la question **1. a.** en expliquant sa construction.
3. En supposant que l'évolution ait été la même pour les années suivantes, donner une estimation du taux d'accès au niveau baccalauréat pour 1996.

II. Lors de la publication du tableau de la partie **I.**, le taux d'accès au niveau baccalauréat pour 1996 n'était pas encore connu. On l'a connu seulement plus tard.

1. Déterminer le taux d'accès en 1996 si l'on sait que, pour la période 1980 (incluse) à 1996 (incluse), la moyenne de ce taux est exactement de 50 %, en ne retenant que les années paires.
2. Comparer alors avec l'estimation faite à la question **3.** de la partie **I** et donner en pourcentage l'erreur commise en remplaçant la valeur exacte par l'estimation faite.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Dans une grande ville, une maladie à incubation lente touche 0,1 % de la population. Un test de dépistage est proposé :
- lorsqu'une personne est malade, le test est positif dans 95 % des cas et négatif dans 5 % des cas ;
- lorsqu'une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 96 % des cas, mais déclare la personne malade, c'est-à-dire est positif, dans 4 % des cas.

Lorsqu'une personne, prise au hasard, passe le test, on note
- M l'évènement « la personne est malade » ;
- $\overline{M}$ l'évènement « la personne n'est pas malade » ;
- T l'évènement « le test est positif » ;
- $\overline{T}$ l'évènement « le test est négatif ».

1. Donner la valeur de la probabilité $p(M)$ et les valeurs des probabilités conditionnelles suivantes : $p(T/M)$, $p\left(T/\overline{\mathrm{M}}\right)$, $p\left(\overline{\mathrm{T}}/\mathrm{M}\right)$ et $p\left(\overline{\mathrm{T}}/\overline{\mathrm{M}}\right)$.
2. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement « M et T », notée $p(M \cap T)$.

   b. Calculer la probabilité de l'évènement « M et T », notée $p(M \cap T)$.

   c. En déduire que la probabilité de T vaut $p(T) = 0{,}04091$.
3. Calculer la probabilité pour que le test donne un résultat non conforme à la réalité.
4. Le maire de la ville passe le test : il est positif. Donner la probabilité, à 10^{-1} près, que le maire soit effectivement malade.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

À partir de 1997 une association d'aide à la recherche médicale envoie chaque année à Monsieur X un courrier pour l'inviter à l'aider financièrement par un don. Monsieur X a répondu favorablement en 1997 en envoyant un don. On admet que, chaque année à partir de 1998, la probabilité pour que Monsieur X fasse un don est égale à 0,9 s'il a fait un don l'année précédente et à 0,4 s'il n'a rien donné l'année précédente.

On note pour tout entier naturel n :

– E_n l'évènement : « Monsieur X est donateur en $1998 + n$ » ;

– P_n la probabilité de E_n ;

– $\overline{E_n}$ l'évènement contraire de E_n.

1. Traduire les données en termes de probabilités conditionnelles concernant les événements E_{n+1}, E_n, $\overline{E_n}$.
2. **a.** Préciser la valeur de P_0.

   b. Calculer $P\left(E_1 \cap E_0\right)$ et $P\left(E_1 \cap \overline{E_0}\right)$. En déduire la valeur de P_1.
3. **a.** Montrer que $P\left(E_{n+1} \cap E_n\right) = 0,9P_n$ et que $P\left(\mathrm{E}_{n+1} \cap \overline{E_n}\right) = 0,4(1 - P_n)$ pour tout entier n.

   b. En déduire que $P_{n+1} = 0,5P_n + 0,4$ pour tout entier naturel n.

   c. Quelle est la probabilité pour que Monsieur X soit donateur en 2001 ?
4. On définit une suite (U_n) en posant pour tout entier naturel n : $U_n = P_n - 0,8$

   a. Démontrer que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

   b. Exprimer (U_n) en fonction de n.

   c. En déduire que $P_n = 0,1 \times 0,5^n + 0,8$ pour tout entier naturel n.

   d. Déterminer la limite de la suite (P_n).

PROBLÈME **10 points**

Sur le graphique ci-après, sont tracées dans un repère orthogonal, les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions f et g, dérivables sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Partie A - Question préliminaire (les résultats seront donnés à 0,1 près).

1. Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 7$ et $f(x) = 4$.
2. Lire graphiquement $g(0)$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 14]$.
4. En déduire le signe de f' sur l'intervalle $[0 ; 14]$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

Partie B

La fonction f est la fonction de demande d'un produit, elle met en correspondance le prix $f(x)$ du produit et la quantité x achetée par les consommateurs.
La fonction g est la fonction d'offre, elle met en correspondance le prix $g(x)$ du produit et la quantité x vendue par les producteurs. La quantité est exprimée en milliers d'unités et le prix en centaines de francs.

1. **Interprétation économique**
À l'aide de la lecture graphique faite en **A**, répondre aux questions suivantes :
   a. Quelle quantité est achetée par les consommateurs :
   — si le prix est de 700 F ?
   — si le prix est de 400 F ?
   b. Au-dessous de quel prix les producteurs ne sont-ils pas prêts à vendre ?
2. **Étude de la recette marginale**
La fonction recette R est définie sur l'intervalle $[0\,;\,14]$ par $R(x) = xf(x)$.
Une valeur approchée de la recette marginale (recette pour le x^{e} produit vendu) est donnée par $R'(x)$, où R' est la fonction dérivée de la fonction R.
On remarque que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,14]$, $R'(x) = f(x) + xf'(x)$.
   a. Déduire du **A. 4.** le signe de $\mathrm{R}'(x) - f(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,14]$.
   b. Comparer alors, pour tout niveau de production, la recette marginale et le prix de vente $f(x)$.
3. **Équilibre du marché**
   a. La fonction f représentée sur le graphique est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{40}{x+2}.$$
   Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Quelle interprétation économique peut-on faire de ce résultat ?
   b. La fonction g représentée sur le graphique est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :
   $g(x) = \dfrac{1}{18}x^2 + 3$.
   Dans un marché à concurrence pure et parfaite, le prix p_0 qui se forme sur le marché selon la « loi de l'offre et de la demande » correspond à l'égalité de l'offre et de la demande, c'est-à-dire à l'ordonnée du point d'intersection I des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
   Soit x_0 l'abscisse du point d'intersection I.
   — Montrer par le calcul que x_0 est solution de l'équation
$$\text{(E)} \qquad x^3 + 2x^2 + 54x - 612 = 0.$$
   — Développer l'expression $(x-6)(x^2+8x+102)$, résoudre l'équation (E), et en déduire la valeur de x_0.
   — Calculer $p_0 = f(x_0)$.
4. **Le surplus des consommateurs**
Le surplus des consommateurs se définit comme la différence entre le montant maximal que les consommateurs auraient été prêts à payer pour acheter une quantité x_0 et le montant qu'ils payent effectivement.
Ce nombre S_{C}, en situation de concurrence pure et parfaite, est donné en centaine de milliers de francs par :
$$S_{\text{C}} = \int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x - p_0x_0.$$
On prendra $x_0 = 6$ et $p_0 = 5$.

a. Calculer S_C.

b. Soit les points O$(0\,;\,0)$, P$(x_0\,;\,0)$, I$\left(x_0\,;\,p_0\right)$ et R$\left(0\,;\,p_0\right)$.
Sachant que le produit $p_0 \times x_0$ est représenté par l'aire du rectangle OPIR, interpréter graphiquement le surplus des consommateurs.