Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2000

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2, indiscernables au toucher.
On tire une boule du sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac, puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac.
Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
À chaque tirage de **deux boules**, on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, le point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$.
On désigne par D le disque de centre O et de rayon 1,7.
Les résultats seront donnés sous forme de **fraction irréductible**.

1. Placer dans le plan muni du repère $(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ les points correspondant aux différents résultats possibles.
2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A « Le point M est sur l'axe des abscisses » ;
   B « Le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ».
3. **a.** Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme $x^2 + y^2$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Calculer son espérance mathématique $\text{E}(X)$.
   b. Montrer que la probabilité de l'évènement « le point M appartient au disque D » est égale à $\dfrac{4}{9}$.
4. On tire 5 fois de suite, de façon indépendante, deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi 5 points du plan.
   Quelle est la probabilité de l'évènement suivant :
   C : « Au moins un de ces points appartient au disque D » ?
5. On renouvelle n fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi n points du plan.
   Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins un de ces points appartient à D » soit supérieure ou égale à 0,999 9.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats qui n'ont pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$(unité graphique : 2 cm).

1. **a.** Donner l'écriture algébrique du nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\text{i}z - 2 = 4\text{i} - z$. On donnera la solution sous forme algébrique.
2. On désigne par I, A et B les points d'affixes respectives 1, 2i et 3 + i.
   a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.
   b. Calculer l'affixe z_C du point C image de A par la symétrie de centre I.
   c. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{z_\text{C} - z_\text{B}}{z_\text{A} - z_\text{B}}$.
   En déduire le module et un argument de ce nombre. (z_A et z_B désignent les affixes des points A et B).

d. Soit D le point d'affixe z_D tel que $z_D - z_C = z_A - z_B$.
Montrer que ABCD est un carré.

3. Pour tout point M du plan, on considère le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MI}$.

b. Montrer que le point K défini par $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{AB}$ est le milieu du segment [AD].

c. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que

$$\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\| = \left\| 2\overrightarrow{AB} \right\|.$$

Construire Γ.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm). On désigne par m un nombre réel. On considère la transformation T_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = (m + i)z + m - 1 - i$$

Partie A

1. Peut-on choisir m de telle sorte que T_m soit une translation ?

2. Déterminer le réel m de telle sorte que T_m soit une rotation. Préciser alors le centre et l'angle de cette rotation.

Partie B

Dans la suite de l'exercice on pose $m = 1$.

1. a. Calculer l'affixe du point Ω invariant par T_m.

b. Pour tout nombre complexe z différent de 1, calculer $\dfrac{z' - 1}{z - 1}$.

En interprétant géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z' - 1}{z - 1}$, démontrer que T_1 est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

c. Démontrer que, pour tout nombre z on a : $z' - z = i(z - 1)$. En déduire que si M est distinct de Ω , alors le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M.

2. On définit dans le plan une suite (M_n) de points en posant :

$$M_0 = O,\ M_1 = T_1(M_0),\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul} : M_n = T_1(M_{n-1}).$$

a. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan muni du repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = \Omega M_n$. Démontrer que la suite (d_n) est une suite géométrique. Converge-t-elle ?

PROBLÈME **11 points**

Partie A étude préliminaire : mise en place d'une inégalité.

1. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On désigne par Δ la droite d'équation $y = x+1$ et par Γ la courbe d'équation $y = \text{e}^x$.
 a. Que représente la droite Δ pour la courbe Γ ?
 b. Tracer dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la droite Δ et donner l'allure de Γ.
2. **a.** Démontrer que pour tout réel t, $\text{e}^t \geqslant t+1$. Interpréter graphiquement ce résultat.
 b. En déduire que pour tout réel t, $\text{e}^{-t} + t + 1 \geqslant 2$, et que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ on a : $\dfrac{1}{x} + \ln x + 1 \geqslant 2$.

Partie B étude d'une fonction.

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = (x+1)\ln x.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. **a.** Étudier le sens de variations de g en utilisant la **partie A**.
 b. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.
2. **a.** Déterminer une équation de la tangente D à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
 b. On appelle h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = g(x) - 2x + 2$.
 étudier le sens de variations de h. On pourra utiliser la question **A 2 b**.
 En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.
 c. étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D.
3. Tracer $\mathcal{C}$ et D dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \displaystyle\int_n^{n+1} g(x)\,\text{d}x$.
 a. Donner une interprétation géométrique de U_n.
 b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul on a :

$$g(n) \leqslant U_n \leqslant g(n+1).$$

 c. En déduire le sens de variation de la suite (U_n).
 d. La suite (U_n) est-elle convergente ?

Partie C étude d'une primitive.

G désigne la primitive de g sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule en 1.
On a donc : pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $G(x) = \displaystyle\int_1^x g(t)\,\text{d}t$.

1. Quel est le signe de $G(x)$ suivant les valeurs de x ?
2. Calculer $G(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Déterminer les limites de G en 0 et en $+\infty$.
Pour l'étude en $+\infty$, on pourra mettre x en facteur dans l'expression $G(x)$.
Pour l'étude en 0, on admettra que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$.