

⌘ Baccalauréat S Amérique du Sud ⌘
décembre 2002

EXERCICE 1

5 points

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) on appelle A et B les points d'affixes respectives 2 et -2 . À tout point M d'affixe z , z différent de 2, on associe le point N d'affixe \bar{z} et M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{2z-4}{\bar{z}-2}$$

1. Calculer z' et $|z'|$ lorsque $z = 5$ puis lorsque $z = 1 + i$.
2. **a.** Interpréter géométriquement $|z - 2|$ et $|\bar{z} - 2|$.
b. Montrer que, pour tout z distinct de 2, $|z'| = 2$. En déduire une information sur la position de M' .
3. Déterminer l'ensemble \mathcal{E} des points M d'affixe z ($z \neq 2$) tels que $M' = B$.
4. On note $Z_{\overrightarrow{AM}}$ et $Z_{\overrightarrow{BM'}}$, les affixes respectives des vecteurs \overrightarrow{AM} et $\overrightarrow{BM'}$.
Montrer que, pour tout point M distinct de A et n'appartenant pas \mathcal{E} , le quotient $\frac{Z_{\overrightarrow{AM}}}{Z_{\overrightarrow{BM'}}}$ est un nombre réel. Interpréter géométriquement ce résultat.
5. Un point M distinct de A, n'appartenant pas \mathcal{E} , étant donné, proposer une méthode géométrique pour construire le point M' . On illustrera par une figure.

EXERCICE 2

5 points

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite d'entiers définie par $a_n = 111 \dots 11$ (l'écriture décimale de a_n est composée de n chiffres 1). On se propose de montrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2 001.

1. En écrivant a_n sous la forme d'une somme de puissances de 10, montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \frac{10^n - 1}{9}$.
2. On considère la division euclidienne par 2 001 : expliquer pourquoi parmi les 2 002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste.
Soit a_n et a_p deux termes de la suite admettant le même reste ($n < p$).
Quel est le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2 001 ?
3. Soit k et m deux entiers strictement positifs vérifiant $k < m$.
Démontrer l'égalité $a_m - a_k = a_{m-k} \times 10^k$.
4. Calculer le PGCD de 2 001 et de 10.
Montrer que si 2 001 divise $a_m - a_k$, alors 2 001 divise a_{m-k} .
5. Démontrer alors que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2 001.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes.
Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. On le lance une fois ; si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.
 - a. Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.
 - b. Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?
 - c. Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?
2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.
 - a. Montrer que la probabilité de l'évènement « la 3^e boule tirée est noire » vaut $\frac{1}{4}$.
 - b. Certains pensent que l'évènement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'évènement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai ? Justifier.

PROBLÈME

10 points

A. Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = e^x(1-x) + 1.$$

1. Étudier le sens de variation de g .
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1,27; 1,28]$; on note α cette solution.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty; 0[$.
Justifier que $g(x) > 0$ sur $]0; \alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

B. Étude de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 2.$$

On désigne par \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) ; unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
2.
 - a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
 - b. Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote pour \mathcal{C}_f .
 - c. Étudier la position de \mathcal{C}_f par rapport à (d).
3.
 - a. Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans la partie A).
 - b. Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$.
 - c. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
4. Tracer la courbe \mathcal{C}_f dans le repère avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse α .

C. Encadrements d'aires

Pour tout entier naturel n , tel que $n \geq 2$, on note \mathcal{D}_n l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan, dont les coordonnées vérifient : $2 \leq x \leq n$ et $2 \leq y \leq f(x)$ et on appelle \mathcal{A}_n son aire, exprimée en unités d'aire.

1. Faire apparaître \mathcal{D}_5 sur la figure.

2. Démontrer que pour tout x , tel que $x \geq 2$, on a :

$$\frac{7}{8}xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x + 1} \leq xe^{-x}.$$

3. On pose $I_n = \int_2^n xe^{-x} dx$.

À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n .

4. Écrire un encadrement de \mathcal{A}_n en fonction de I_n .

5. On admet que \mathcal{A}_n a une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Que peut-on en déduire pour la limite de \mathcal{A}_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Donner une interprétation géométrique de ce dernier résultat.