Baccalauréat S Amérique du Nord juin 1999

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie I

Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 50 des 100 leçons.
On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons différentes. Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers.
On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

1. Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun de ces sujets ?
2. Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?
3. Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul de ces sujets ?
4. Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?

Partie II

On considère maintenant que l'élève a étudié n des 100 leçons (n étant un entier naturel inférieur ou égal à 100).

1. Quelle est la probabilité p_n qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?
2. Déterminer les entiers n tels que p_n soit supérieur ou égal à $0,95$.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, l'unité graphique étant 4 cm. On considère les points A_0, A_1 d'affixes respectives : $a_0 = 1$; $a_1 = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{12}}$.
Le point A_2 est l'image du point A_1 par la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{12}$.

1. **a.** Calculer l'affixe a_2 du point A_2 sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
   b. Soit I le milieu du segment $[\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2]$. Calculer l' affixe du point I.
   c. Faire une figure.
2. **a.** Prouver que les droites (OI) et (OA_1) sont confondues.
   b. Écrire sous forme trigonométrique l'affixe de I.
   c. Déterminer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ (les valeurs exactes sont exigées), sachant que $\sqrt{4\sqrt{3}+8} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Soit $E = \{1~;~2~;~3~;~4~;~5~;~6~;~7~;~8~;~9~;~10\}$. Déterminer les paires $\{a~;~b\}$ d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1.

Partie II

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

a. L'entier $(n-1)!+1$ est-il pair ?

b. L'entier $(n-1)!+1$ est-il divisible par un entier naturel pair ?

2. Prouver que l'entier $(15-1)!+1$ n'est pas divisible par 15.
3. L'entier $(11-1)!+1$ est-il divisible par 11 ?

Partie III

Soit p un entier naturel non premier ($p \geqslant 2$).

1. Prouver que p admet un diviseur q $(1 < q < p)$ qui divise $(p-1)!$.
2. L'entier q divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?
3. L'entier p divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?

Problème **11 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty~;~1[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique étant 2 cm.

Partie I

1. **a.** Soit $X = \dfrac{2}{x-1}$.
   Prouver l'égalité : $\dfrac{2}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}X^2\mathrm{e}^X$.
   En déduire la limite de f quand x tend vers 1.

   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   c. En déduire une asymptote à la courbe Γ.
2. **a.** Soit v la fonction numérique définie sur $]-\infty~;~1[$ par :
   $$v(x) = \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}.$$
   Calculer $v'(x)$.

   b. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x-1)^4}\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}$.
3. Étudier les variations de f.
4. Tracer la courbe (Γ).

Partie II

1. Déterminer une primitive de f sur $]-\infty~;~1[$.
2. Soit α réel tel que $0 < \alpha < 1$, déterminer :
   $$g(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Quelle est la limite de $g(\alpha)$ quand α tend vers 1 ?
4. Quelle est l'aire en cm^2 du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x = -\alpha$ et $x = \alpha$?

Partie III

1. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ a deux solutions dont l'une est -1.
   On notera β l'autre solution.
   b. Donner un encadrement de largeur 10^{-2} de β.
2. Soit a un élément de $]-\infty\,;\,1[$.
   Déterminer graphiquement, en fonction de a, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = f(a)$.