∽ Baccalauréat C Amiens juin 1973 ∾

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^4 + (3-6\text{i})z^2 + 2(16-63\text{i}) = 0$$

EXERCICE 2

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = -x + x\text{Log}\, x$$

(Log x désigne le logarithme népérien de x).

1. Déterminer le domaine de définition de f.

   Étudier $f(x)$ et $\dfrac{f(x)}{x}$ aux bornes du domaine de définition ; ces quantités ont-elles des limites finies et, dans ce cas, quelles sont ces limites ?
2. Étudier les variations de la fonction f.

   Construire avec précision la courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthonormé, l'unité de longueur étant 2 cm.

   On précisera l'allure de la courbe aux bornes du domaine de définition.
3. Soit $\alpha \in]0~;~\text{e}[$.

   En utilisant une intégration par parties, trouver l'aire de la partie du plan comprise entre $x'\text{O}x$, (C) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \text{e}$.

   Quelle est la limite de cette aire lorsque α tend vers zéro ?

PROBLÈME

On rappelle que l'ensemble des matrices carrés d'ordre 2, à coefficients réels, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et que ce même ensemble, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un anneau non commutatif unitaire.
1 1) (1 -1)

Partie A

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$.
Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices $M = aA + bB$ avec $(a~;~b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de base $(A,~B)$.
2. Montrer que $(\mathcal{M},~+,~\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

   Déterminer l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}$, et montrer que leurs inverses sont éléments de $\mathcal{M}$.
3. On pose : $M^1 = M$ et pour tout n entier supérieur à 1 : $M^n = M^{n-1} \times M$.

   Démontrer, par recurrence, que pour tout n élément de $\mathbb{N}^\star$:

$$M^n = 2^{n-1}a^nA + 2^{n-1}b^nB.$$

Partie B

On considère l'endomorphisme $F_{a,\,b}$ d'un plan vectoriel E ayant pour matrice $M = aA + bB$ par rapport à une base orthonormée $\left(\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$ de E.

1. Déterminer le noyau et l'image de $F_{a,\,b}$ suivant les valeurs de a et de b.

2. On considère les vecteurs :

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}\,.$$

Déterminer les matrices des applications $F_{0,\,b}$ et $F_{a,\,0}$ par rapport à la base orthonormée $\left(\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$.

Montrer que chacune de ces applications est, lorsque a et b ne sont pas nuls, la composée d'une projection et d'une homothétie qu'on précisera.

3. Déterminer la matrice de $F_{a,\,b}$ par rapport à la base $\left(\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$.

Dans quels cas $F_{a,\,b}$ est-elle une rotation, une symétrie, une homothétie ?

Donner, avec précision, les éléments définissant ces applications.

Partie C

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine associé à E. $\mathscr{E}$ est muni du repère $\left(\text{O},\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$. On appelle f l'application affine de E, transformant O en $\omega\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et dont l'endomorphisme associé est $F_{\frac{3}{2},\,\frac{1}{2}}$.

1. Montrer que les coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ du point $f(m)$ s'expriment à l'aide des coordonnées $(x\,;\,y)$ du point m par :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x' & = & x + \dfrac{1}{2} \\ y' & = & 3y + \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

2. Soit (C) le cercle de centre ω, et passant par O.

Trouver l'équation de la courbe $\left(C'\right)$ transformée de (C) par l'application f.

Montrer que $\left(C'\right)$ est une conique à centre. Soit ω' son centre.

Écrire une équation de $\left(C'\right)$ par rapport au repère $\left(\omega',\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$.

Calculer les coordonnées des sommets de cette conique dans le repère $\left(\text{O},\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$.