

∞ Baccalauréat C Amiens septembre 1970 ∞

EXERCICE 1

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0$$

et donner ses racines, si elles existent, à 10^{-8} près.

EXERCICE 2

Étudier la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = e^x + \text{Log}|x|.$$

On pourra étudier le signe de $xf'(x)$ pour $x \neq 0$.

On ne demande pas de calculer les points d'inflexion.

Calculer, pour $x \neq 0$, la dérivée de la fonction $x\text{Log}|x|$.

Calculer l'aire de la surface comprise entre la courbe, l'axe des x et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \alpha$, pour $\alpha > 2$.

Montrer que cette aire tend vers $+\infty$ quand α tend vers $+\infty$.

PROBLÈME

Par rapport à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , une conique (γ) a pour équation

$$15x^2 - 10y^2 - 30ax + 9a^2 = 0,$$

où a désigne un nombre réel strictement positif donné.

1. Quelle est la nature de la conique (γ) ?

Calculer les coordonnées de son centre, de ses sommets, déterminer les équations des asymptotes s'il y a lieu.

Quelle est la valeur de son excentricité ?

Soit M un point quelconque de (γ) , de coordonnées x et y . Calculer, en fonction de a et de l'abscisse x de M , l'expression rationnelle de la longueur OM (on distinguera deux cas).

On pose $OM = \rho$, $(\vec{Ox}, \vec{OM}) = \theta \pmod{2\pi}$.

Calculer ρ en fonction de a et de θ .

2. Soit α un nombre réel et (D_α) la droite passant par O et par le point d'affixe $u_\alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

Lorsque (D_α) n'est pas parallèle à une asymptote de (γ) , on note M' et M'' les points d'intersection de (D_α) et de (γ) , z' et z'' les affixes de ces points.

a. Calculer z' et z'' en fonction de α .

b. On considère le point, P , d'affixe Z définie par

$$\frac{2}{Z} = \frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}$$

Donner l'expression trigonométrique de Z . Quel est l'ensemble des points P quand α varie ?

Que peut-on dire de la figure formée par les points O, P, M' et M'' ?

3. Soit (I) l'inversion de pôle O laissant invariant le cercle principal de (γ) , m' , m'' et p les transformés par (I) de M' , M'' et P .
Quelle est la puissance de l'inversion (I) ? Quelles particularités les positions relatives de m' , m'' et p et la longueur du segment $m'm''$ ont-elles quand α varie ? Quel est l'ensemble des points P ?